

# Problemas con Valores en la Frontera

*A. Zozaya S.*

3 de julio de 2009

## Índice

Índice	1
1. Introducción	1
2. Teorema de la unicidad	3
3. Problemas con valores en la frontera en una dimensión	5
4. Problemas con valores en la frontera en dominios rectangulares 2D	8
5. Teoría de imágenes	12
6. Problemas propuestos	13
Bibliografía	14

## 1. Introducción

Hasta ahora habíamos resuelto problemas de electrostática en los que se especificaba explícitamente la distribución de cargas en forma de una  $\rho_v(\mathbf{r}')$  y mediante un procedimiento de integración se calculaba el potencial eléctrico  $V(\mathbf{r})$ :  $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$  (ver figura 1).

Existe, sin embargo, un conjunto de otros problemas en electrostática denominados problemas con valores en la frontera, los cuales consisten, definida cierta región  $R$ , delimitada por cierta frontera  $\partial R$ , en encontrar una función potencial  $V = V(\mathbf{r})$  que satisfaga en  $R$ , o la ecuación de Laplace:  $\nabla^2 V = 0$ , o la ecuación de Poisson:  $\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$ , y que satisfaga, a su vez, ciertas condiciones dadas en  $\partial R$ .

En los problemas con valores en la frontera la región  $R$  consiste, en general, de un dieléctrico simple, y la frontera  $\partial R$  está conformada por las superficies exteriores de dos o más conductores inmersos en el dieléctrico. En la Figura 2(a) la zona en blanco, donde se ha escrito la ecuación de LAPLACE, constituye la región  $R$  de interés, y las superficies  $S_{1,2}$  exteriores de los dos cuerpos

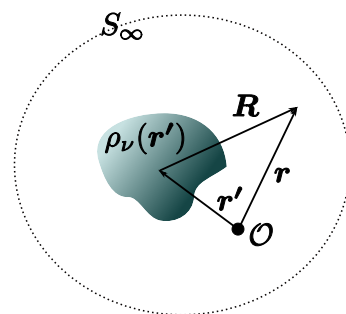
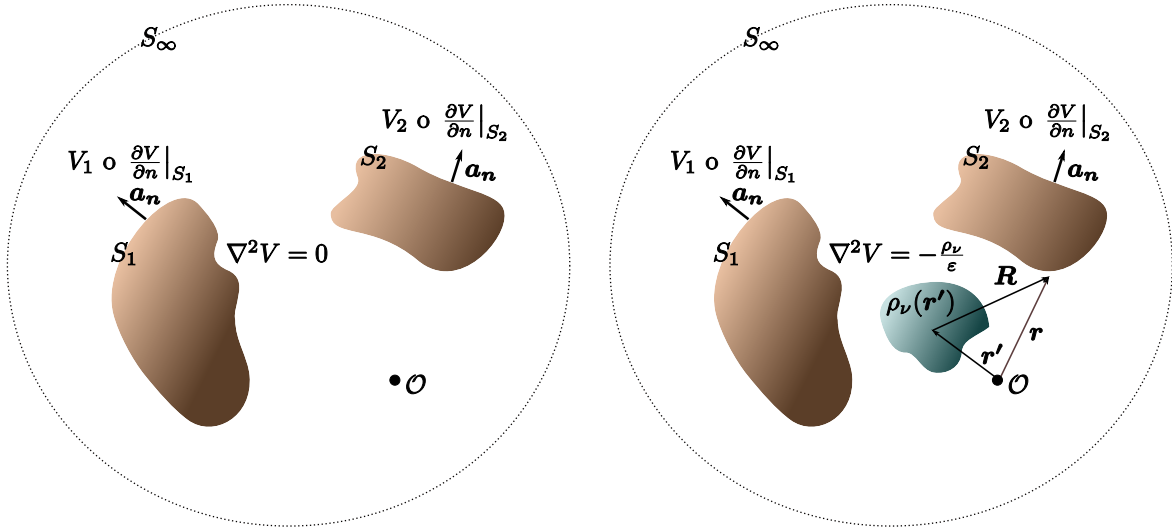


Figura 1: Distribución de cargas en un espacio ilimitado.



(a) Región  $R$  delimitada por las superficies  $S_{1,2}$  y el infinito ( $\delta R$ ). (b) Región  $R$  con una distribución de cargas presente.

Figura 2: Problemas con valores en la frontera.

conductores presentes, constituyen la frontera  $\partial R$  de  $R$ . En la Figura 2(b) se ha recreado el mismo escenario y se ha añadido una distribución de cargas libres según una ley  $\rho_\nu = \rho_\nu(\mathbf{r}')$  creando un nuevo problema con valores en la frontera, que viene a ser la superposición de los problemas representados por las figuras 1 y 2(a). Si se conviene en denominar  $V_H(\mathbf{r})$  la solución del problema con valores en la frontera de la Fig. 2(a), y  $V_P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho_\nu(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$  la solución del problema de la figura 1, la solución del problema de la Figura 2(b) será:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= V_H(\mathbf{r}) + V_P(\mathbf{r}) \\ &= V_H(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho_\nu(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \end{aligned} \quad (1)$$

En los problemas con valores en la frontera, en general, existen ciertas distribuciones de cargas sobre  $S_{1,2}$ , las cuales suelen llamarse «externas», porque no se encuentran en el interior de  $R$ , que no se conocen explícitamente y que por tanto no pueden integrarse, pero que se especifican indirectamente mediante las denominadas condiciones de borde.

Los problemas con valores en la frontera pueden ser de uno de los tipos siguientes:

☞ De DIRICHLET o del primer tipo, en el que en la frontera se especifica el valor de  $V$ :

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 V &= 0 \\ V|_{S_{1,2}} &= V_{1,2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

☞ De NEUMANN o del segundo tipo, en el que en la frontera se especifica el valor de la derivada direccional de  $V$  respecto de la normal a la frontera:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 V &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial n} |_{S_{1,2}} &= \frac{\partial V}{\partial n} |_{1,2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

☞ Mixto, en el que en parte de la frontera se especifica el valor de  $V$ , y en el resto el de la derivada direccional de  $V$  respecto de la normal a la frontera:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 V &= 0 \\ V|_{S_1} &= V_1 \\ \frac{\partial V}{\partial n}|_{S_2} &= \frac{\partial V}{\partial n}|_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

La solución de los problemas del tipo esquematizado en la figura 2(a) se reduce a resolver la ecuación de Laplace, lo cual será posible analítica o numéricamente según sea la geometría de  $R$ . Si la geometría de  $R$  es una geometría canónica, la solución del problema se podrá hallar usando métodos analíticos. Si la geometría fuera arbitraria, sin simetría alguna, se deberá estimar  $V(\mathbf{r})$  utilizando métodos numéricos. A los fines académicos tiene sentido revisar, por ahora, solo aquellos problemas con solución analítica posible.

## 2. Teorema de la unicidad

El teorema de la unicidad establece que dos soluciones de la ecuación de LAPLACE (o de POISSON) que satisfacen las mismas condiciones en la frontera son idénticas si se trata de un problema de contorno de DIRICHLET o mixto, o difieren a lo sumo en una constante aditiva si se trata de un problema de contorno de NEUMANN [1, 3, 5]. Para demostrar este teorema supóngase que se dispone de dos soluciones de la ecuación de Laplace (o de Poisson):  $\phi_1 = \phi_1(\mathbf{r})$  y  $\phi_2 = \phi_2(\mathbf{r})$ :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_1 &= 0 \\ \nabla^2 \phi_2 &= 0 \end{aligned}$$

o:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_1 &= -\frac{\rho_\nu}{\varepsilon} \\ \nabla^2 \phi_2 &= -\frac{\rho_\nu}{\varepsilon} \end{aligned}$$

tales que las mismas satisfacen ciertas condiciones de borde. Estas condiciones de contorno pueden ser del primer tipo (problema de DIRICHLET):

$$\phi_1|_{S_{1,2}} = V_{1,2} \quad (5)$$

$$\phi_2|_{S_{1,2}} = V_{1,2} \quad (6)$$

del segundo tipo (problema de NEUMANN):

$$\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right|_{S_{1,2}} = \left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{S_{1,2}} \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right|_{S_{1,2}} = \left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{S_{1,2}} \quad (8)$$

o mixtas.

Se define una nueva función  $\Phi = \Phi(\mathbf{r})$  dada por:  $\Phi(\mathbf{r}) = \phi_1(\mathbf{r}) - \phi_2(\mathbf{r})$ . Facilmente se comprueba que la nueva función satisface la ecuación de LAPLACE (ya no la de POISSON):

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi &= \nabla^2(\phi_1 - \phi_2) \\ &= \nabla^2\phi_1 - \nabla^2\phi_2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Si se toma el gradiente de la función  $\Phi$  y se multiplica por la propia función  $\Phi$  se comprueba, aplicando el Teorema de la Divergencia, que la integral de la divergencia de la función producto resultante,  $\nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi)$ , en la región  $R$  del problema es nula:

$$\begin{aligned}\int_R \nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) \, d\nu &= \int_{S_{1,2}} \Phi\nabla\Phi \cdot ds\mathbf{a}_n \\ &= \int_{S_{1,2}} \Phi (\nabla\Phi \cdot \mathbf{a}_n) \, ds \\ &= \int_{S_{1,2}} \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} \, ds \\ &= \int_{S_{1,2}} (\phi_1|_{S_{1,2}} - \phi_2|_{S_{1,2}}) \left( \frac{\partial\phi_1}{\partial n} \Big|_{S_{1,2}} - \frac{\partial\phi_2}{\partial n} \Big|_{S_{1,2}} \right) \, ds \\ &= 0\end{aligned}\tag{9}$$

La divergencia  $\nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi)$  puede, además, expandirse en la suma de dos términos:

$$\nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) = \Phi\nabla^2\Phi + (\nabla\Phi)^2$$

pero como  $\nabla^2\Phi = 0$  sigue, tomando en cuenta la ecuación 9, que:

$$\int_R (\nabla\Phi)^2 \, d\nu = 0$$

resultado que solo puede ser posible si  $\nabla\Phi = 0$  en todos los puntos de  $R$ , lo cual implica, a su vez, que  $\Phi$  sea constante en  $R$ , e inclusive sobre la frontera  $S_{1,2}$ . Que  $\Phi$  sea constante en  $R + S_{1,2}$ , y llamando  $k$  esta constante, significa que  $\phi_1 - \phi_2 = k$ .

En un problema de DIRICHLET o mixto el valor de esta constante se puede determinar evaluando esta diferencia en algún punto donde se conozcan de antemano los valores  $\phi_{1,2}$ . Este punto puede ser uno cualquiera sobre la frontera y facilmente se comprueba que  $k$  es nula, resultando idénticas las funciones  $\phi_{1,2}$ :  $\phi_1 = \phi_2$ .

En un problema de Neumann resulta obvio, después de derivar:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial n} \Big|_{S_{1,2}} &= \frac{\partial k}{\partial n} \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial n} \Big|_{S_{1,2}} - \frac{\partial\phi_2}{\partial n} \Big|_{S_{1,2}} &= 0\end{aligned}$$

que la diferencia entre las dos soluciones de la ecuación de Laplace  $\phi_{1,2}$  es precisamente una constante aditiva,  $k$ , indeterminada.

### 3. Problemas con valores en la frontera en una dimensión

Existen en su totalidad 5 diferentes problemas con valores en la frontera en una dimensión tomando como referencia los sistemas de coordenadas Cartesianas, cilíndricas y esféricas. En la Fig. 3 se muestran las distintas geometrías de los conductores que dan lugar a los problemas con valores en la frontera en 1D en los sistemas de coordenadas mencionadas.

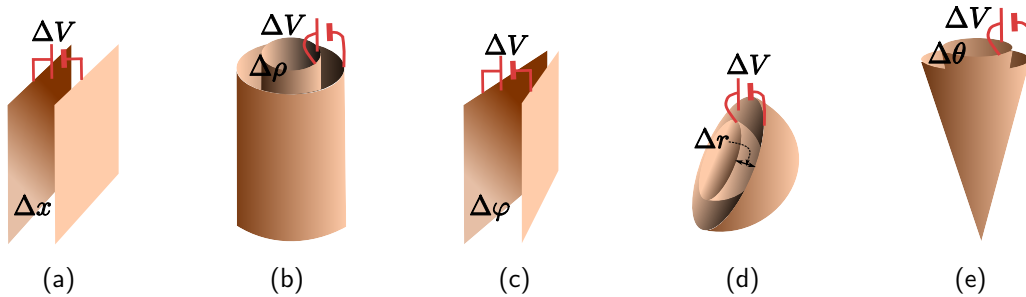


Figura 3: Geometrías de los conductores que dan lugar a los problemas con valores en la frontera en 1D en los sistemas de coordenadas Cartesianas, cilíndricas y esféricas.

En el Cuadro 1 se muestran las ecuaciones de LAPLACE específicas, y sus correspondientes soluciones, de cada una de las geometrías presentadas en la Fig. 3 [1, 5].

Cuadro 1: Ecuaciones de LAPLACE específicas de cada una de las geometrías presentadas en la Fig. 3 y sus correspondientes soluciones.

Geometría del problema	Ecuación de Laplace	Solución
Fig. 3(a)	$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$	$V(x) = Ax + B$
Fig. 3(b)	$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0$	$V(\rho) = A \ln \rho + B$
Fig. 3(c)	$\frac{1}{\rho^2} \frac{d^2V}{d\varphi^2} = 0$	$V(\varphi) = A\varphi + B$
Fig. 3(d)	$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0$	$V(r) = -\frac{A}{r} + B$
Fig. 3(e)	$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0$	$V(\theta) = A \ln \left( \tan \frac{\theta}{2} \right) + B$

Las constantes indeterminadas  $A$  y  $B$  que aparecen en las soluciones que se muestran en la tercera columna del Cuadro 1 se han de resolver evaluando tales soluciones en la frontera para los problemas de contorno de DIRICHLET y mixto. En el problema de contorno de NEUMANN la constante  $B$  no se podrá resolver. Esta limitación no impide, sin embargo, el calculo del campo eléctrico como  $\mathbf{E} = -\nabla V$  en este tipo de problema.

## Ejercicio

Se desea calcular la capacitancia del sistema que se muestra en la figura 4. Dicho sistema consiste de dos esferas conductoras concéntricas rellenas con dos dieléctricos homogéneos distintos.

El cálculo de  $C$  se efectuará suponiendo conocida la diferencia de potencial  $\Delta V$  entre los conductores, y hallando la carga  $Q$  acumulada en el conductor a mayor potencial como una función de  $\Delta V$ :  $Q = Q(\Delta V)$ :

$$C = \frac{Q(\Delta V)}{\Delta V}$$

Para ello se hace necesario el planteamiento de dos problemas con valores en la frontera, a partir de la fijación de la diferencia de potencial  $\Delta V$  entre los conductores, y estableciendo apropiadas condiciones de borde.

Los problemas con valores en la frontera han de ser:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV_1}{dr} \right) = 0 \\ V_1(a) = \Delta V \end{array} \right\}, \quad a < r < b \quad (10)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV_2}{dr} \right) = 0 \\ V_2(c) = 0 \end{array} \right\}, \quad b < r < c \quad (11)$$

Las soluciones de estos problemas son, respectivamente:

$$V_1(r) = -\frac{A}{r} + B, \quad a < r < b \quad (12)$$

$$V_2(r) = -\frac{C}{r} + D, \quad b < r < c \quad (13)$$

Vemos que al tener cuatro constantes indeterminadas las condiciones de frontera establecidas no son suficientes: hacen falta dos condiciones de borde adicionales. Estas condiciones de borde han de ser añadidas por nosotros a la luz del comportamiento de  $V_{1,2}(r)$  y de  $\frac{\partial V_{1,2}}{\partial r}$  en la frontera entre los dos dieléctricos, a saber:

$$V_1(b) = V_2(b) \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial V_1}{\partial r} \right|_{r=b} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left. \frac{\partial V_2}{\partial r} \right|_{r=b} \quad (15)$$

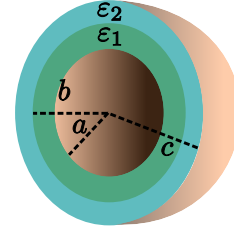


Figura 4: Corte transversal del sistema bajo estudio, el cual consiste en dos esferas conductoras concéntricas de radios  $a$  y  $c$ , respectivamente, cuyo interior se ha llenado con dos materiales de constantes dieléctricas  $\varepsilon_{1,2}$ .

juntando las condiciones de frontera establecidas en las ecuaciones (10) y (11) con las definidas mediante las ecuaciones (14) y (15), se puede escribir:

$$\begin{aligned}\Delta V &= -\frac{A}{a} + B \\ 0 &= -\frac{C}{c} + D \\ -\frac{A}{b} + B &= -\frac{C}{b} + D \\ A &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} C\end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}A &= \frac{\Delta V}{\left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \\ B &= \Delta V - \frac{\Delta V}{\left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \frac{1}{a} \\ C &= \frac{\Delta V}{\kappa \left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \\ D &= \frac{\Delta V}{\kappa \left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \frac{1}{c}\end{aligned}$$

donde  $\kappa = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ .

De esta forma tenemos:

$$\begin{aligned}V(r) &= \Delta V - \frac{\Delta V}{\left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \frac{1}{a} - \frac{\Delta V}{\left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \frac{1}{r}, \quad \forall r/a \leq r \leq b \\ V(r) &= \frac{\Delta V}{\kappa \left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \frac{1}{c} - \frac{\Delta V}{\kappa \left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \frac{1}{r}, \quad \forall r/b \leq r \leq c\end{aligned}$$

El campo eléctrico  $\mathbf{E}$  se puede calcular como  $\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr} \mathbf{a}_r$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{\Delta V}{\left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} \quad \forall r/a \leq r \leq b \\ \mathbf{E} &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\Delta V}{\left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} \quad \forall r/b \leq r \leq c\end{aligned}$$

Utilizando el campo  $\mathbf{D}$  la carga  $Q$  se puede calcular mediante la integral  $Q = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$ , tomando  $S$  de tal forma que contenga la esfera conductora interior:

$$\begin{aligned}Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varepsilon_1 \frac{\Delta V}{\left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{a}_r \\ &= \frac{\Delta V}{\left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \varepsilon_1 4\pi\end{aligned}$$

y finalmente se obtiene:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon_1}{\left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]}$$

Facilmente se comprueba que la capacitancia del sistema de la figura 4 se puede pensar como la capacitancia equivalente de dos sistemas esféricos en serie, cada uno con capacitancias asociadas de  $C_1 = 4\pi\epsilon_1/(1/b - 1/a)$  y  $C_2 = 4\pi\epsilon_2/(1/c - 1/b)$ :

$$\begin{aligned} C &= C_1 \parallel C_2 \\ &= \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \\ &= \frac{1}{\frac{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}{4\pi\epsilon_1} + \frac{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)}{4\pi\epsilon_2}} \\ &= \frac{4\pi\epsilon_1}{\left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \end{aligned}$$

## 4. Problemas con valores en la frontera en dominios rectangulares 2D

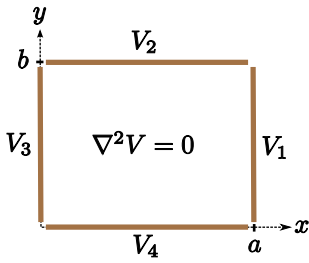


Figura 5: Dominio rectangular.

En coordenadas Cartesianas existe un problema con valores en la frontera general que engloba cuatro problemas particulares distintos pero muy parecidos entre sí. El problema general se ilustra en la figura 5.

En dicha figura se muestra una región rectangular definida por  $0 < x < a$  y  $0 < y < b$ . En la misma figura se identifican cuatro fronteras en las que la función  $V$  asume valores distintos:  $V(a, y) = V_1$ ,  $y \in ]0, b[$ ,  $V(x, b) = V_2$ ,  $x \in ]0, a[$ ,  $V(0, y) = V_3$ ,  $y \in ]0, b[$  y  $V(x, 0) = V_4$ ,  $x \in ]0, a[$ .

El problema con valores en la frontera resultante tiene la forma:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 V &= 0 \\ V(a, y) &= V_1 \quad V(x, b) = V_2 \\ V(0, y) &= V_3 \quad V(x, 0) = V_4 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

El problema definido por la ecuación (16) se puede pensar como la superposición de los



siguientes 4 problemas menos generales –ver figura 6–:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 V = 0 \\ V(a, y) = V_1 \quad V(x, b) = V_2 \\ V(0, y) = V_3 \quad V(x, 0) = V_4 \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \nabla^2 V = 0 \\ V(a, y) = V_1 \quad V(x, b) = 0 \\ V(0, y) = 0 \quad V(x, 0) = 0 \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} \nabla^2 V = 0 \\ V(a, y) = 0 \quad V(x, b) = V_2 \\ V(0, y) = 0 \quad V(x, 0) = 0 \end{array} \right\} \\
 + \left. \begin{array}{l} \nabla^2 V = 0 \\ V(a, y) = 0 \quad V(x, b) = 0 \\ V(0, y) = V_3 \quad V(x, 0) = 0 \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} \nabla^2 V = 0 \\ V(a, y) = 0 \quad V(x, b) = 0 \\ V(0, y) = 0 \quad V(x, 0) = V_4 \end{array} \right\} \quad (17)$$

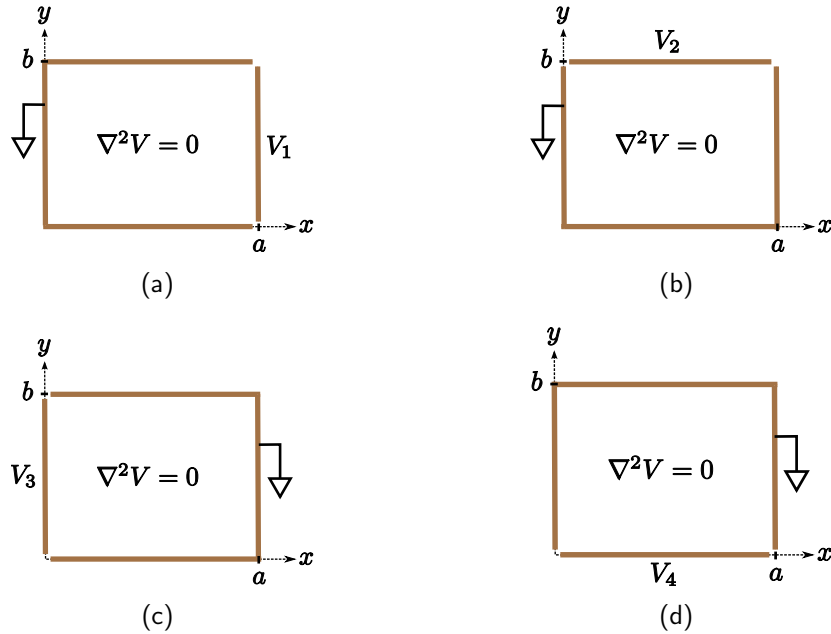


Figura 6: Subdivisión del problema global dado en la figura 5 en cuatro problemas particulares.

Se procederá a resolver el problema particular siguiendo los desarrollos presentados en [1, 4]:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \\ V(a, y) = V_1 \quad V(x, b) = 0 \\ V(0, y) = 0 \quad V(x, 0) = 0 \end{array} \right\} \quad (18)$$

para ello se supondrá que la solución tiene la forma de un producto de dos funciones,  $X$  y  $Y$ , las cuales dependen única y respectivamente de las variables  $x$  y  $y$ :  $X = X(x)$  y  $Y = Y(y)$ , de tal suerte que  $V(x, y) = X(x)Y(y)$ . Sustituyendo este producto en la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

$$\begin{aligned}
Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} &= 0 \\
\underbrace{\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}}_{F_1(x)} + \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}}_{F_2(y)} &= 0
\end{aligned} \tag{19}$$

Para que la suma de  $F_1(x)$  y  $F_2(y)$  se mantenga igual a cero en todos los puntos dentro del dominio rectangular se requiere que las funciones  $F_1$  y  $F_2$  sean iguales mutuamente a una constante:  $F_1(x) = \alpha^2$  y  $F_2(y) = -\alpha^2$ , lo cual permite escindir la ecuación de Laplace en dos ecuaciones diferenciales unidimensionales:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \alpha^2 \tag{20}$$

$$-\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \alpha^2 \tag{21}$$

Por solución de la ecuación (20) se tomará:

$$X(x) = A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x) \tag{22}$$

y por solución de la ecuación (21) se tomará:

$$Y(y) = C \cos(\alpha y) + D \sin(\alpha y) \tag{23}$$

De este modo la solución buscada tiene la forma:

$$V(x, y) = [A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x)] [C \cos(\alpha y) + D \sin(\alpha y)] \tag{24}$$

Las constantes indeterminadas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  se determinan evaluando  $V(x, y)$  en la frontera:

$$\begin{aligned}
V(x, 0) = 0 &\Rightarrow [X(x)] [C] = 0 \Rightarrow C = 0 \\
V(x, b) = 0 &\Rightarrow [X(x)] [D \sin(\alpha b)] = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{m\pi}{b} \\
& m = 1, 2, \dots, \infty \\
V(0, y) = 0 &\Rightarrow A \left[ D \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \right] = 0 \Rightarrow A = 0
\end{aligned}$$

obteniendo

$$V(x, y) = V_0 \sinh\left(\frac{m\pi}{b} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \tag{25}$$

con  $m = 1, 2, \dots, \infty$  y  $V_0 = BC$ .

Ciertamente la función  $V(x, y) = V_0 \sinh\left(\frac{m\pi}{b} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right)$  no puede satisfacer la condición de borde  $V(a, y) = V_1$ . Sin embargo, ya que la ecuación (25) representa en realidad una familia de soluciones, cualquier combinación lineal de los miembros de esta familia constituye, a su vez, una solución de la ecuación (18) y satisface, además, las condiciones de borde  $V(x, 0) = 0$ ,  $V(x, b) = 0$  y  $V(0, y) = 0$ :

$$V(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} V_m \sinh\left(\frac{m\pi}{b}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

No es ilógico pensar que pueda existir una apropiada combinación lineal de estas soluciones que satisfaga la cuarta condición de borde:  $V(a, y) = V_1$ , condición de frontera que ninguno de los miembros de la familia (25) satisface individualmente:

$$V(a, y) = V_1 \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} V_m \sinh\left(\frac{m\pi}{b}a\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) = V_1$$

equivalentemente:

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) = V_1 \quad (26)$$

donde  $c_m = V_m \sinh\left(\frac{m\pi a}{b}\right)$  es cierto número para cada valor de  $m$ . En la ecuación (26), la sumatoria  $\sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$  puede verse como la expansión en serie de Fourier de la constante  $V_1$ , y las constantes  $c_m$  como los coeficientes de la serie. Los coeficientes  $c_m$  pueden calcularse haciendo la función  $V(a, y)$  periódica, de período  $2b$ , y de simetría impar mediante el siguiente producto interno:

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{2}{b} \int_{-b}^0 \left[ -\sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dy + \frac{2}{b} \int_0^b \left[ \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dy \\ &= \frac{2}{b} \int_{-b}^0 [-V_1] \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dy + \frac{2}{b} \int_0^b [V_1] \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dy \end{aligned}$$

de donde:

$$c_m = \begin{cases} \frac{4V_1}{m\pi} & m \text{ impar} \\ 0 & m \text{ par} \end{cases} \quad (27)$$

siguiendo que:

$$V_m = \frac{4V_1}{m\pi \sinh(m\pi a/b)}, \quad m \text{ impar}$$

y

$$V(x, y) = \sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ impar}}}^{\infty} \frac{4V_1}{m\pi \sinh(m\pi a/b)} \sinh\left(\frac{m\pi}{b}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (28)$$

En la figura 7 se muestra una gráfica de  $V(x, y)$  para  $V_1 = 2$ .

Las restantes soluciones particulares del problema global (ecuación 17) se pueden componer a partir de la solución (28) permutando apropiadamente los valores  $a \leftrightarrow b$  y las variables  $x \leftrightarrow y$ , y rotando y desplazando, apropiadamente, las funciones en  $x$  y en  $y$ . En la tabla 2 se muestran estas soluciones.

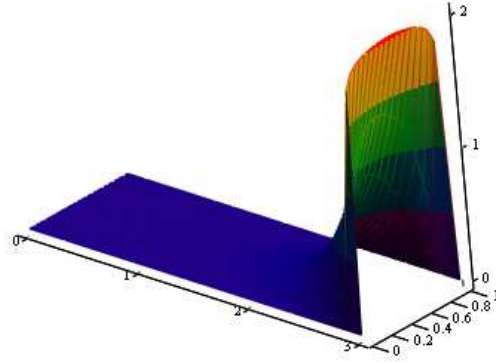


Figura 7: Grafica de  $V(x, y)$  para  $V_1 = 2$ .

Problema de contorno	Solución
$\nabla^2 V = 0$ $V(a, y) = 0 \quad V(x, b) = V_2$ $V(0, y) = 0 \quad V(x, 0) = 0$	$\sum_{m \text{ impar}}^{\infty} \frac{4V_2}{m\pi \sinh(m\pi b/a)} \sinh\left(\frac{m\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$
$\nabla^2 V = 0$ $V(a, y) = 0 \quad V(x, b) = 0$ $V(0, y) = V_3 \quad V(x, 0) = 0$	$\sum_{m \text{ impar}}^{\infty} \frac{4V_3}{m\pi \sinh(m\pi a/b)} \sinh\left[\frac{m\pi}{b}(-x+a)\right] \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$
$\nabla^2 V = 0$ $V(a, y) = 0 \quad V(x, b) = 0$ $V(0, y) = 0 \quad V(x, 0) = V_4$	$\sum_{m \text{ impar}}^{\infty} \frac{4V_4}{m\pi \sinh(m\pi b/a)} \sinh\left[\frac{m\pi}{a}(-y+b)\right] \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$

Cuadro 2: Soluciones particulares del problema global expresado mediante la ecuación (17).

## 5. Teoría de imágenes

Algunos problemas del tipo ilustrado en la Fig. (2(b)), por presentar una elevada simetría, se les puede resolver mediante la sustitución de los cuerpos conductores por unas cargas equivalentes *determinadas*, que se pueden integrar, denominadas *cargas imágenes*. Las cargas imágenes producirán el potencial  $V_H(\mathbf{r})$  de la solución expresada mediante la Ec. (1) en la región  $R$  ( $\mathbf{r} \in R$ )

$$V_H(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'_C} \frac{\rho_\nu^{im}(\mathbf{r}')}{R} d\nu'$$

donde  $V'_C$  es el volumen del conductor, tal que la solución  $V_P(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'_C} \frac{\rho_\nu^{im}(\mathbf{r}')}{R} d\nu'$  satisfaga las condiciones de borde en  $\partial R$ . Variados ejemplos y problemas que ilustran la aplicación de este método se pueden encontrar en la literatura [1, 2, 5]. En una entrega posterior de este artículo el autor incluirá una ilustración de la aplicación del método a un problema concreto.

## 6. Problemas propuestos

1. Dado el sistema de conductores que se ilustra en la Fig. 8, constituido por una esfera conductora de radio  $a$  concéntricamente ubicada en el interior de un segundo conductor esférico hueco, de radio interior  $b$  y radio exterior  $c$ , si en el conductor interno se depositan  $Q_0$  [C] en exceso

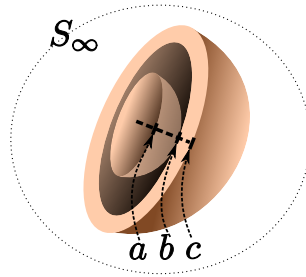


Figura 8: Corte transversal del sistema de conductores del Problema 1.

- a) Resuelva el potencial eléctrico  $V$  y el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  postulando, razonadamente, un problema de NEUMANN en la región  $a < r < b$  y un problema mixto en la región  $c < r < \infty$ .
  - b) Resuelva el potencial eléctrico  $V$  y el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  postulando, razonadamente, un problema mixto en ambas regiones.
2. Dos semi-planos conductores de dimensiones infinitas forman un ángulo  $\Delta\varphi$  como se muestra en la Fig. 3(c). Entre estos semi-planos hay un medio de propiedades intrínsecas  $\varepsilon$  y  $\sigma$ .
    - a) Calcular la capacitancia  $C = Q(\Delta V)/\Delta V$  asociada a la porción del sistema definida por  $\Delta z = h$  y  $\Delta\rho = \rho_e - \rho_i$ .
    - b) Calcular la resistencia  $R$  asociada a la misma porción del sistema mediante la fórmula  $R = \Delta V/I$ .
    - c) Comprobar que  $RC = \varepsilon/\sigma$ .
  3. Dos conductores de dimensiones infinitas forman un ángulo  $\Delta\theta$  como se ilustra en la Fig. 3(e). Entre los dos conductores hay un medio de propiedades intrínsecas  $\varepsilon$  y  $\sigma$ .
    - a) Calcular la capacitancia  $C = Q(\Delta V)/\Delta V$  asociada a la porción del sistema definida por  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  y  $\Delta r = r_e - r_i$ .
    - b) Calcular la resistencia  $R$  asociada a la misma porción del sistema mediante la fórmula  $R = \Delta V/I$ .
    - c) Comprobar que  $RC = \varepsilon/\sigma$ .

## Bibliografía

- [1] William H. Hayt. *Teoría electromagnética*. McGraw-Hill, Mexico, 1991.
- [2] Syed A. Nasar. *2000 solved problems in electromagnetism*. McGraw Hill, USA, 1992.
- [3] V. V. Nikolski. *Electrodinámica y propagación de ondas de radio*. MIR, Moscú, 1980.
- [4] Simo Ramo, Jhon R. Whinnery, and Theodore Van Duzer. *Fields and Waves in Communication Electronics*. John Wiley and & Sons, Inc., USA, 1965.
- [5] Reitz/Milford/Christy. *Fundamentos de la teoría electromagnética*. Addison-Wesley Iberoamericana, USA, 1984.