Matemática
Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Definición: Una ecuación que contiene una o mas derivadas parciales d una función (desconocida) de dos o mas variables independientes se llama ecuación diferencial, se llama orden de la ecuación al orden de la derivada superior.

Ecuación diferencial parcial lineal.

Definición: Una ecuación diferencial parcial, se dice que es lineal si es de primer grado, si es de primer grado dependiente y sus derivadas parciales.

Ecuación homogénea.

Definición: si cada termino de la ecuación diferencial parcial contiene la variable dependiente, o bien, una de sus derivadas, se dice que es homogénea en caso contrario es no homogénea.

Ejemplos:

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ecuación unidimensional de onda

$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ecuación unidimensional de calor

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ecuación bidimensional de Laplace

Definición: una solución de una ecuación parcial en alguna región R del espacio de las variables independientes es una función que tiene todas las derivadas parciales que aparecen en la ecuación en algún dominio que contiene a R.
Por ejemplo: $u = x^2 - y^2$; $u = e^x .\cos(y)$. Son soluciones de la ecuación: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Teorema: si u_1 y u_2 son dos soluciones de una ecuación diferencial parcial lineal y homogénea en alguna región, entonces $u = c_1.u_1 + c_2.u_2$ es solución de la ecuación en esa región.

Ecuación de calor.

Una ecuación diferencial similar describe la difusión de la energía térmica en un sólido de una dimensión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g$$

En este caso u(x, t) es la temperatura en la posición x en el tiempo t, k la difusión térmica y g(x, t) se obtiene de las posibles fuentes de energía térmica distribuidas a través del sólido. En ocasiones esta ecuación diferencial parcial recibe el nombre de ecuación de calor en lugar de ecuación de difusión.

Soluciones de producto.

Esta se utiliza cuando la condición de frontera es homogénea, cando u(x, t)=0 es solución de la condición de frontera, para ello se realiza un estudio de las condiciones de frontera en cero, esto es:

U(0, t)=0	U(L, t)=0
U(x, 0)=0	

Para realizar la separación de variables se busca las soluciones de producto, es decir, escribir una función dependiente de dos variables, como el producto de dos funciones dependientes de variables distintas, entonces:

$U(x, t) = \Phi(x).h(t)$

$\phi(x).\frac{dh}{dt} = kh(t)\frac{d^2\phi}{dx^2}$ Se divide entre ϕ(x)kh(t) para separar las variables

$\frac{1}{kh(t)}.\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\phi(x)}\frac{d^2\phi}{dx^2}$ Como estos dos son iguales podemos igualarlo a una constante λ, entonces:

$$\frac{1}{kh(t)}.\frac{dh}{dt}=\frac{1}{\phi(x)}\frac{d^2\phi}{dx^2}=-\lambda$$ Por conveniencia se coloca negativo, y se resuelve cada miembro con el valor constante.

$$\frac{1}{kh(t)}.\frac{dh}{dt}=-\lambda$$
$$\frac{dh}{h(t)}=k(-\lambda)dt \quad \phi(x)$$
$$\ln(h)=-k\lambda t$$
$$h(t)=ce^{-k\lambda t}$$

Procedemos a resolver la segunda expresión:

$$\frac{1}{\phi(x)}\frac{d^2\phi}{dx^2}=-\lambda$$
$$\frac{d^2\phi}{dx^2}=-\lambda\phi(x)$$

Con $\Phi = e^{RT}$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}=-\lambda\phi(x)$$
$$R^2e^{RT}=-\lambda e^{RT}$$
$$R^2=-\lambda$$
$$R=\pm i\sqrt{\lambda}$$

La solución de la ecuación diferencial es de la forma:

$$\phi(x)=c_1 sen\sqrt{\lambda}x+c_2\cos\sqrt{\lambda}x$$

Al considerar condición de frontera $\Phi(0) = 0$

$$\phi(0)=c_1 sen\sqrt{\lambda}x+c_2\cos\sqrt{\lambda}x=0$$
$$\phi(0)=c_2=0$$

Al considerar condición de frontera $\Phi(L) = 0$

$$\phi(L)=c_1 sen\sqrt{\lambda}L=0$$
$$c_1\neq 0$$

Tenemos:

$$\phi(L)=c_1 sen\sqrt{\lambda}L=0=c_1 sen(n\pi)$$
$$\sqrt{\lambda}L=n\pi$$

Como solución del valor de λ tenemos:

$$\lambda=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

Tomamos los valores obtenidos y lo introducimos en la función u(x, t) principal:

$$u(x,t)=ce^{-k\lambda t}c_1 sen\frac{n\pi}{L}x$$
$$u(x,t)=Be^{-k\lambda t}sen\frac{n\pi}{L}x$$

Problema del valor inicial.

Estas soluciones de producto son análogas a las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas. Para una ecuación diferencial lineal homogénea de orden *n* existen *n* soluciones linealmente independientes, y la solución general es una combinación lineal de estas *n* soluciones. Para la ecuación parcial homogénea $\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, existe un numero infinito de soluciones $u(x,t)=Be^{-k\lambda t}sen\frac{n\pi}{L}x$ para n = 1,2,3... Una combinación lineal de todas estas soluciones en forma de producto también será una solución:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-k\lambda t}sen\frac{n\pi}{L}x$$

donde B_n son constantes arbitrarias. Para las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden *n*, las *n* constantes se determinan a partir de las *n* condiciones iniciales. Para la ecuación de difusión $\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, las constantes arbitrarias B_n se determinan a partir de la condición inicial u(x, 0) = f(x), la dependencia espacial de la concentración química en t = 0, u(x, 0) = f(x), para 0 < x <L, donde f(x) esta dado.

Existen preguntas difíciles, por ejemplo, si la serie infinita $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n sen\frac{n\pi x}{L}$ converge o no.

Aun cuando la serie converja, no es trivial probar que la serie infinita de hecho resuelve la ecuación diferencial parcial.

Haciendo t=0 tenemos:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen \frac{n\pi x}{L}$$

Esta expresión es una representación de f(x) por Serie de Fourier de senos, de allí deducimos el valor de B_N:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t) sen \frac{n\pi x}{L} dx$$

La ecuación de la Laplace.

Supongamos que se quiere obtener la temperatura u(x, y) correspondiente al estado permanente en una placa rectangular; las condiciones de frontera que se indican son

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < a, o < y < b$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=o} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a} = 0 \quad o < y < b$$

u(x,0)=0, u(x, b) = f(x), 0 < x < a

Solución.

Separando las variables se obtiene:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda^2,$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0$$

$$X = c_1 \cos \lambda x + c_2 sen \lambda x$$

$$Y = c_{31} \cosh \lambda y + c_4 senh \lambda y$$

en donde las tres primeras condiciones de frontera se traducen en $X'(0) = 0$, $X'(a) = 0$ y $Y(0) = 0$. Derivando X y haciendo x = 0 se obtiene $c_2 = 0$, y por lo tanto, $X = c_1 \cos \lambda x$. Derivando nuevamente y luego haciendo x = a resulta $-c_1 \lambda \,\text{sen}\, \lambda a = 0$. Esta última condición se satisface cuando $\lambda = 0$, cuando $\lambda a = n\pi$ o bien $\lambda = n\pi/a$, siendo n = 1, 2, … obsérvese que $\lambda = 0$ implica que X” = 0. La solución general de esta ecuación esta dada por la función lineal $X = c_1 + c_2 x$. En este caso, las condiciones de frontera $X'(0) = 0$, $X'(a) = 0$, exigen que $X = c_1$. Se concluye que $\lambda = 0$ es un valor propio. Haciendo corresponder $\lambda = 0$ con n = 0, se tiene que las funciones propias son:

$$X = c_1,\ n = 0 \qquad y \qquad X = c_1 \cos \frac{n\pi}{a} x,\ n = 1, 2, \dots$$

Finalmente, la condición Y(0) = 0 obliga a que $c_3 = 0$, cuando $\lambda > 0$. Sin embargo, cuando $\lambda = 0$ la ecuación se transforma en Y” = 0 y por lo tanto la solución esta dada por $Y = c_3 + c_4 y$. No obstante, Y(0) = 0 nuevamente implica que $c_3 = 0$ y así $Y = c_4 y$, por consiguiente las soluciones en forma de producto de la ecuación que satisfacen las tres primeras condiciones de frontera son

$$A_0 y,\ n = 0 \qquad y \qquad A_n \text{senh}(\frac{n\pi}{a} y)\cos(\frac{n\pi}{a} x),\ n = 1, 2, \dots$$

El principio de esta suposición da otra solución más,

$$U(x, y) = A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{senh}(\frac{n\pi}{a} y)\cos(\frac{n\pi}{a} x).$$

Sustituyendo y = b en donde resulta

$$U(x, b) = f(x) = A_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \text{senh} \frac{n\pi}{a} b) \cos \frac{n\pi}{a} x.$$

Lo cual es, en este caso, un desarrollo de f en serie de cosenos en medio intervalo. Si hacemos las identificaciones $A_0 b = a_0/2$ y en $A_n \text{senh}(\frac{n\pi}{a} b) = a_n$, n = 1, 2, 3, ..., de donde se tiene que:

$$2A_0 b = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)dx$$

$$A_0 = \frac{2}{ab}\int_0^a f(x)dx$$

$$A_n senh\frac{n\pi}{a}b = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a}xdx$$

$$A_n = \frac{2}{asenh\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a}xdx$$

La solución formal de este problema consiste en la serie dada en donde A_0 y A_n esta definida anteriormente.

Laplace, Pierre Simón de (1749-1827)

Matemático y astrónomo francés que desarrolló la mecánica celeste, cuyo nombre permanece unido a la llamada teoría nebular del origen del sistema solar.

Demostró que las perturbaciones gravitatorias inducidas por un planeta sobre otro no tienen como consecuencia inmediata la aparición de irregularidades en sus órbitas, como creía Newton. Además se dedicó a los estudios de mecánica celeste y, junto con Lagrange, fue la mayor autoridad de su siglo.

Entre 1799 y 1825 escribió una gran obra en cinco volúmenes, Tratado de mecánica celeste, que incorporaba las nuevas teorías elaboradas desde los trabajos de Newton, así como sus propias aportaciones.