TEORIA ELECTROMAGNETICA
FIZ 0321 (2)

Ricardo Ramírez
Facultad de Física, Pontificia Universidad Católica, Chile

2do. Semestre 2006

Solución de problemas de electrostática

- Ecuación de Laplace
- Coordenadas esféricas
- Coordenadas cilíndricas
- Coordenadas cartesianas
- Dos dimensiones
- Método de las imágenes

ECUACION DE POISSON

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o} \qquad \vec{E} = -\nabla\phi \rightarrow \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_o}$$

ECUACION DE LAPLACE

$$\nabla^2\phi = 0$$

en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

Unicidad de la solución

Dos soluciones de la ecuación de Laplace con las mismas condiciones de borde difieren a lo más en una constante.

Sean ϕ_1 y ϕ_2 las dos soluciones y $\Phi = \phi_1 - \phi_2$, Entonces $\Phi = 0$ en las superficies S que definen el borde. Usando del teorema de la divergencia:

$$\int_V \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) d^3 r = \int_S \Phi \nabla \Phi \cdot \hat{n} d^2 r = 0$$

Pero:

$$(\nabla \Phi)^2 = \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) - \Phi \nabla^2 \Phi$$

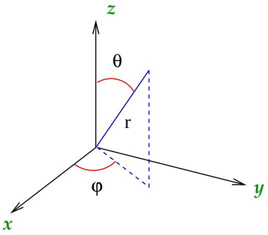
Luego:

$$\int_V (\nabla \Phi)^2 d^3 r = 0$$

Como $(\nabla \Phi)^2$ no puede ser negativo, $\nabla \Phi = 0$, i.e. $\Phi = \mathrm{const.}$

Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas son $r.\theta, \varphi$, ver figura.



Consideraremos solamente potenciales con simetría azimutal, i.e. que no dependen de φ, En este caso:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = 0$$

Esta ecuación es separable ya que escribiendo $\phi(r,\theta) = R(r)P(\theta)$, obtenemos:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) = k = \text{const.}$$

La ecuación del lado derecho es la ecuación de Legendre, cuyas únicas soluciones físicas aceptables (en $0 \leq \theta \leq \pi$) son aquellas en que $k = n(n+1)$, donde n es un entero.

Estas soluciones son los *Polinomios de Legendre* $P_n(\cos\theta)$, cuya forma para los primeros valores de n es:

n	$P_n(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

La ecuación radial:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - n(n+1)R = 0$$

tiene la solución general de la forma:

$$R(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}$$

Así la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas con simetría azimutal es:

$$\phi(r,\theta) = \sum_n \left[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right] P_n(\cos\theta)$$

Propiedades de los Polinomios de Legendre

$$\frac{dP_{n+1}}{dx} - \frac{dP_{n-1}}{dx} - (2n+1)P_n = 0 \rightarrow \int P_n(x)dx = \frac{P_{n+1} - P_{n-1}}{2n+1}$$

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0; \qquad \frac{dP_{n+1}}{dx} - x\frac{dP_{n-1}}{dx} - (n+1)P_n = 0$$

Fórmula de Rodrigues $\quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)$

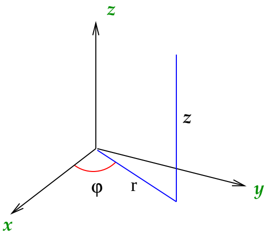
ORTOGONALIDAD

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_{n'}(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nn'}$$

VALORES PARTICULARES

$$
\begin{aligned}
P_n(0) &= 0 \qquad n \quad impar \\
P_n(0) &= (-1)^{n/2}\frac{(n-1)!!}{n!!} \qquad n \quad par \\
P_n(1) &= 1 \\
P_n(-x) &= (-1)^n P(x)
\end{aligned}
$$

Coordenadas cilíndricas



Estudiaremos solamente el caso en que ϕ no depende de z, i.e. coordenadas polares.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}=0$$

Con $\phi = R(r)S(\varphi)$:

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=-\frac{1}{S}\frac{d^2S}{d\varphi^2}=k=\mathrm{const.}$$

$S \simeq \cos k^{1/2}\varphi, \quad \sin k^{1/2}\varphi$, pero por periodicidad $k = n^2$.

La solución de la ecuación radial es r^n o r^{-n}, para $n \neq 0$, y $\ln r$ o constante para $n = 0$.
Por lo tanto la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas polares es:

$$\phi(r,\varphi) = A_o + A_o' \ln r + \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-n}][C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi]$$

Podemos escribir $\phi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$ y la ecuación de Laplace se reduce a:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = k = \mathrm{const.}$$

Por lo tanto

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + kZ = 0$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = k - \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -m = \mathrm{const.}$$

y

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + mY = 0$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} - (k+m)X = 0$$

La forma de las soluciones depende escencialmente del signo de k y m y de las condiciones de borde. Por ejemplo si $k > 0$ y $m > 0$ y $k = p^2, m = q^2$ (impuesto por las condiciones de borde) la solución general será de la forma:

$$
\begin{aligned}
\phi(x,y,z) &= \sum_p \sum_q \left[\Gamma_{pq} e^{(p^2+q^2)^{1/2} x} + \Lambda_{pq} e^{-(p^2+q^2)^{1/2} x}\right] \left[A_{pq} \cos py \cos qz \right. \\
&+ \left. B_{pq} \sin py \sin qz + C_{pq} \sin py \cos qz + D_{pq} \cos py \sin qz\right]
\end{aligned}
$$

Los coeficientes A, B, C y D están determinados por las condiciones de borde.

En el caso que $k = 0$ y $m = 0$ la solución general es de la forma:

$$\phi(x,y,z) = A_1 xyz + A_2 xy + A_3 yz + A_4 zx + A_5 x + A_6 y + A_7 z + A_8$$

Esta solución es aplicable al caso de tres planos conductores que se intersectan perpendicularmente entre sí. En este caso sólo A_1 y A_8 son distintos de cero.

Solución general en dos dimensiones

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

Hacemos un cambio de variable $\xi = x + iy, \eta = x - iy$ y obtenemos:

$$\nabla^2\phi = 4\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta} = 0$$

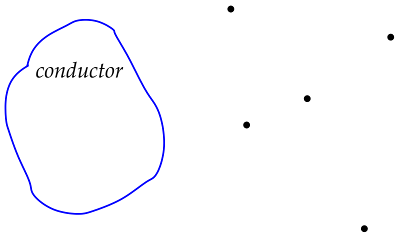
La solución general de esta ecuación es:

$$\phi = F(\xi) + G(\eta) = F(x + iy) + G(x - iy)$$

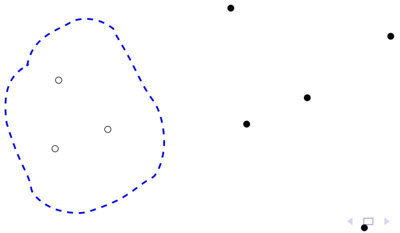
donde F y G son funciones arbitrarias.

Método de las imágenes

Para ilustrar el método consideremos la situación de figura siguiente donde se requiere encontrar el potencial fuera del conductor:



El método de las imágenes consiste en reemplazar el conductor por una serie de cargas, cuyo efecto es reproducir (junto con las cargas ya existentes) la superficie equipotencial del conductor, como se ilustra en la figura siguiente:



Sistema de conductores

Consideremos un sistema de N conductores con geometría fija, en el cual sólo el conductor j está cargado con carga Q_j. La solución de la ecuación de Laplace es única y está dada por $\phi^{(j)}(\vec{r})$. Los potenciales de cada conductor estarán determinados por la carga Q_j y serán $\phi_k^{(j)}$, con $k = 1 \cdots N$.

Al multiplicar Q_j por λ la solución de la ecuación de Laplace queda multiplicada por λ, y así todas las derivadas del potencial. Luego las densidades de carga de cada conductor también quedan multiplicadas por λ.

También quedan multiplicados por λ los potenciales de todos los conductores. Esto implica que el potencial de cada conductor es proporcional al valor de la carga Q_j:

$$\phi_i^{(j)} = p_{ij} Q_j$$

Este mismo argumento se puede aplicar al conductor k y por lo tanto podemos decir que si sólo j y k tienen cargas, el potencial de conductor i se puede escribir como:

$$\phi_i = p_{ij}Q_j + p_{ik}Q_k$$

Esto se puede generalizar a:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}Q_j$$

Los coeficientes p_{ij} se llaman *coeficientes de potencial.* Es posible demostrar que $p_{ij} = p_{ji}$

Ejemplo 1

Una esfera conductora de radio R, tiene carga total Q y por lo tanto un potencial $\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q}{R}$. Encuentre el potencial en $r > R$, usando la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas con simetría azimutal:

$$\phi(r,\theta) = \sum_n \left[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right] P_n(\cos\theta)$$

Ejemplo 2

Una esfera conductora de radio R, tiene un potencial $+V_o$ en un hemisferio y $-V_o$ en el otro. Encuentre el potencial en cualquier punto del espacio.

Ejemplo 3

Un anillo tiene una carga Q uniformemente distribuída. Calcule el potencial en cualquier punto del espacio.

Ejemplo 4

Una esfera conductora con radio R, a potencial cero se encuentra en presencia de una carga puntual a una distancia $a > R$ de su centro. Use el método de las imágenes para calcular el potencial fuera de la esfera.

Ejemplo 5

Un dipolo se encuentra se localizado en el centro de la esfera conductora a tierra. Encuentre el potencial en el interior de la esfera.

Ejemplo 6

Se tiene un campo eléctrico constante en todo el espacio y luego se introduce una esfera conductora a tierra. Encontrar el potencial electrostático en todo punto del espacio.