FUNCIÓN DE ONDA Y ECUACIÓN DE ONDA EN UNA DIMENSIÓN

Fís. Jorge Eduardo Aguilar Rosas

El movimiento ondulatorio en un sistema se presenta cuando una perturbación producida en un lugar del medio se propaga con una rapidez que depende de las características del medio físico.

Las características generales de propagación de las ondas las analizaremos a partir de la situación de un medio no-dispersivo en una dimensión. Primero indicaremos la forma general de las funciones de onda que se propagan hacia la derecha o a la izquierda. Luego, presentaremos las características y parámetros importantes relativos a las ondas armónicas. En la tercera parte, nos referiremos a los aspectos particulares de las ondas periódicas, mediante el Teorema de Fourier. En la parte final mostraremos la estructura general de la ecuación de onda en una dimensión para un medio sin dispersión.

1. Ondas viajeras en una dimensión

Como punto de partida consideremos la descripción matemática de las ondas que se propagan sin deformarse (medio no-dispersivo) en una dimensión. Para fijar ideas, y por su sencillez, tomemos como ejemplo una línea recta que pasa por el origen, como se muestra en la figura 1.a, dada por la ecuación:

$$f(x) = mx, \tag{1}$$

donde m es la pendiente. Si ahora queremos representar a la recta "desplazada" hacia la derecha una distancia "a", manteniendo la misma pendiente, como se indica en la figura 1.b, la función viene dada por la ecuación:

$$f(x) = m(x - a). \tag{2}$$

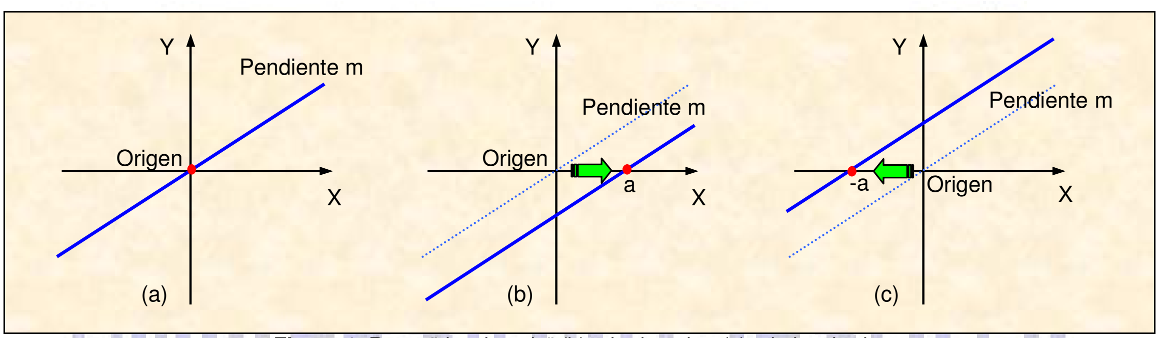

Figura 1. Recta "desplazada" (b) a la derecha, (c) a la izquierda.

Si el "desplazamiento" es hacia la izquierda una distancia "a", como se muestra en la figura 1.c, la ecuación de la recta queda como:

$$f(x) = m(x + a). \tag{3}$$

Estos "desplazamientos" se pueden generalizar para cualquier función de la siguiente forma. Consideremos que la función f(x) representa a una onda en el tiempo t = 0, y supongamos que la onda se propaga hacia la derecha con la rapidez de propagación v, como se ilustra en la figura 2.b. En el tiempo t, la forma de la onda es la misma pero "desplazada" una distancia "vt", de tal manera que la función que describe a la onda en este tiempo es la misma que en el tiempo t = 0 pero desplazada, esto es:

$$\boxed{y(x,t) = f(x - vt).} \qquad (4)$$

La variable "y" representa a cualquier variable física que se perturbe a partir de su estado estable debido al paso de la onda, por lo que es una función de la posición "x" y del tiempo "t". En el caso de una cuerda "y" puede representar el "desplazamiento" a partir de la posición de equilibrio de cada elemento de la cuerda; para las ondas de sonido "y" puede ser el "desplazamiento" de las partículas del gas (aire) a partir de su "posición de equilibrio", o la "variación" en la presión o la densidad; es decir, en cada medio se tiene que considerar las variables físicas que se ven afectadas por el paso de las ondas.

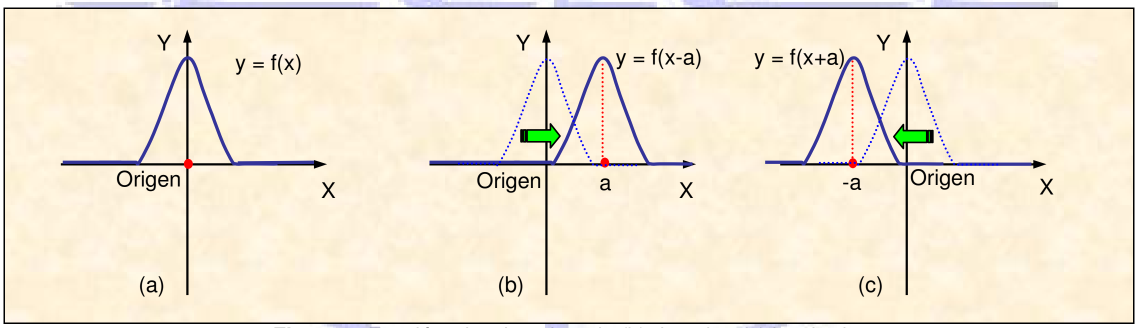

Figura 2. Función "desplazada" a la (b) derecha, (c) izquierda.

Si la onda se "desplaza" hacia la izquierda sin deformarse, con una rapidez de propagación v, como se indica en la figura 2.c, la función de onda que describe a la onda en el tiempo está dada por:

$$\boxed{y(x,t) = f(x + vt).} \qquad (5)$$

En otras palabras, en principio para identificar si una función representa a una onda desplazándose en un medio se debe analizar la dependencia de la función en términos de las cantidades "x – vt" o "x + vt". En el caso de ondas armónicas consideraremos otras formas de expresar estas dependencias aunque en el fondo seguirá siendo lo mismo.

La dependencia de la función de onda de la posición y del tiempo permite "ver" a la onda en dos formas distintas. Si se considera un tiempo "fijo" t_1, se tiene la imagen de la variable "y" del medio para todas las posiciones x, esto es como si se tuviera una "fotografía" del medio, como se muestra en la figura 3.b. La otra forma de "ver" a la onda es "fijarse" únicamente en un elemento o punto del medio x_1, y observar lo que le sucede a la variable "y" en esta posición conforme transcurre el tiempo, como se indica en la figura 3.c. En este caso la máxima deformación ocurre en el tiempo $t_2 = x_1/v$, que es cuando el máximo de la onda está pasando por la posición x_1.

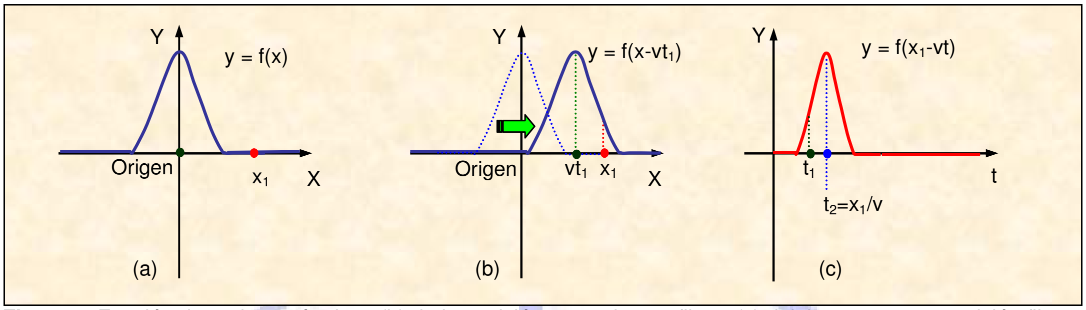

Figura 3. Función de onda en términos (b) de la posición en un tiempo fijo t_1, (c) del tiempo en una posición fija x_1.

Como en el mismo medio se puede tener la presencia de ondas viajando a la derecha y hacia la izquierda, la función de onda correspondiente es la superposición de las funciones de onda:

$$y(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt). \tag{6}$$

Posteriormente se considerará la superposición de ondas con detalle para analizar ondas periódicas de diferentes formas, las situaciones de ondas estacionarias, las pulsaciones o batimientos; en todos estos casos, el punto de partida son las ondas armónicas que presentamos a continuación.

2. Ondas armónicas

Consideremos que una onda que se "desplaza" hacia la derecha, con rapidez de propagación v, en el tiempo t = 0, está descrita por la función armónica "seno",

$$y(x,0) = f(x) = y_M \mathrm{sen}(kx), \tag{7}$$

en donde "y_M" es la amplitud máxima; y, "k" es una constante, llamada "número de onda", que representa la "frecuencia angular espacial" de la onda. Para aclarar el significado de esta "frecuencia" veamos la imagen de la figura 4.a, en donde la forma de la onda se repite a intervalos de distancia "λ". La cantidad λ es el "periodo espacial", llamado "longitud de onda", y su significado es precisamente ese: la distancia a la que la forma de la onda se repite. En la función armónica "seno" la forma de la onda se repite cada "2π" radianes, de tal manera que el argumento de la función armónica "kx" debe reflejar esta "periodicidad espacial", así que

$$k\lambda = 2\pi,$$

de donde el número de onda (frecuencia angular espacial) resulta:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{8}$$

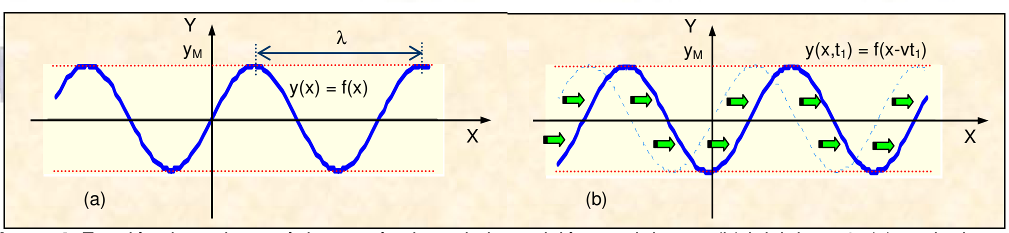

Figura 4. Función de onda armónica en términos de la posición en el tiempo (b) inicial t_0 = 0, (c) cualquiera t_1, desplazándose hacia la derecha

La función de la onda desplazándose hacia la derecha, con rapidez de propagación v, para cualquier tiempo, como se muestra en la figura 4.b, está dada por:

$$y(x,t) = f(x - vt) = y_M \mathrm{sen}[k(x - vt)]; \tag{9}$$

distribuyendo el producto en el argumento tenemos:

$$y(x,t) = y_M \mathrm{sen}(kx - kvt),$$

en donde identificamos a la "frecuencia angular temporal" " o simplemente frecuencia angular), como:

$$\omega = kv, \tag{10}$$

por lo que la función de onda la podemos escribir en la forma:

$$\boxed{y(x,t) = y_M \mathrm{sen}(kx - \omega t).} \tag{11}$$

La frecuencia f y el periodo T están relacionados con la frecuencia angular mediante

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \tag{12}$$

de tal manera que otras formas de escribir a la función de onda armónica son:

$$y(x,t) = y_M \mathrm{sen}\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right)\right]; \tag{13}$$

$$y(x,t) = y_M \mathrm{sen}\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]. \tag{14}$$

Por otra parte la rapidez de propagación de las ondas se puede expresar, de acuerdo con las ecuaciones 8, 10 y 12, como:

$$\boxed{v = \lambda f = \frac{\lambda}{T}.} \tag{15}$$

3. Análisis de Fourier

Consideremos que tenemos una función (de onda) periódica en el espacio f(x), con "periodo espacial" λ, como se muestra en la figura 5.a. El Teorema de Fourier indica que la función f(x) se puede escribir en términos de las funciones armónicas seno y coseno, con "frecuencias angulares" iguales a k, 2k, 3k, ..., nk, ..., siendo $k = 2\pi/\lambda$, en la forma:

$$\begin{aligned} f(x) = a_0 &+ a_1\cos(kx) + a_2\cos(2kx) + a_3\cos(3kx) + \ldots + a_n\cos(nkx) + \ldots \\ &+ b_1\mathrm{sen}(kx) + b_2\mathrm{sen}(2kx) + b_3\mathrm{sen}(3kx) + \ldots + b_n\mathrm{sen}(nkx) + \ldots, \end{aligned} \tag{16}$$

en donde los coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..., b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ..., se obtienen considerando la independencia lineal de las funciones armónicas seno y coseno como se indica posteriormente.

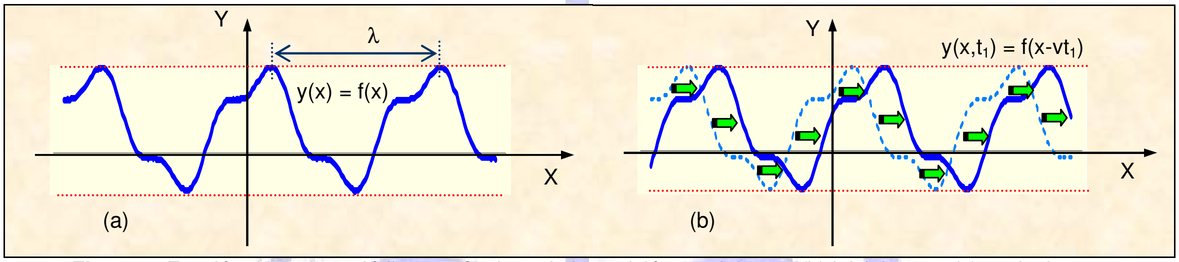

Figura 5. Función de onda periódica en términos de la posición en el tiempo (b) inicial t_0 = 0, (c) cualquiera t_1, desplazándose hacia la derecha

La función de la onda desplazándose hacia la derecha, con rapidez de propagación v, como se indica en la figura 5.b, viene dada por la relación:

$$
\begin{aligned}
f(x-vt) = a_0 &+ a_1\cos(kx-\omega t) + a_2\cos(2kx-2\omega t) + a_3\cos(3kx-3\omega t) + \ldots + a_n\cos(nkx-n\omega t) + \ldots \\
&+ b_1\mathrm{sen}(kx-\omega t) + b_2\mathrm{sen}(2kx-2\omega t) + b_3\mathrm{sen}(3kx-3\omega t) + \ldots + b_n\mathrm{sen}(nkx-n\omega t) + \ldots,
\end{aligned} \tag{17}
$$

en donde se consideró la relación 10, entre la velocidad y la frecuencia angular. La frecuencia $f_1 = \omega/2\pi$ es la frecuencia fundamental o el primer armónico, la frecuencia $f_n = n\omega/2\pi$ corresponde al n-ésimo armónico. La determinación de los coeficientes se puede hacer con la función f(x) de la ecuación 16.

En la determinación de los parámetros consideremos primero el análisis para el parámetro a_0. Al integrar la ecuación 16 en un periodo, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\lambda f(x)dx = \int_0^\lambda [a_0 &+ a_1\cos(kx) + a_2\cos(2kx) + a_3\cos(3kx) + \ldots + a_n\cos(nkx) + \ldots \\
&+ b_1\mathrm{sen}(kx) + b_2\mathrm{sen}(2kx) + b_3\mathrm{sen}(3kx) + \ldots + b_n\mathrm{sen}(nkx) + \ldots]dx,
\end{aligned}
$$

las integrales de las funciones armónicas son nulas, quedando sólo el término de a_0,

$$\int_0^\lambda f(x)dx = a_0\lambda,$$

de donde se obtiene el valor del coeficiente:

$$a_0 = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(x)dx. \tag{18}$$

Para determinar a los coeficientes a_n multiplicamos a la función f(x) indicada en la ecuación 16, por

$$\cos(nkx),$$

e integramos en un periodo, quedando:

$$\int_0^{\lambda} f(x)\cos(nkx)dx = \int_0^{\lambda} [a_0 + a_1\cos(kx) + a_2\cos(2kx) + a_3\cos(3kx) + \ldots + a_n\cos(nkx) + \ldots$$
$$+ b_1\text{sen}(kx) + b_2\text{sen}(2kx) + b_3\text{sen}(3kx) + \ldots + b_n\text{sen}(nkx) + \ldots]\cos(nkx)dx.$$

La integral del primer término de la derecha es nulo, mientras que las otras integrales, debido a la independencia lineal de las funciones seno y coseno resultan:

$$\int_0^{\lambda} \cos(mkx)\cos(nkx)dx = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2} & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

$$\int_0^{\lambda} \text{sen}(mkx)\cos(nkx)dx = 0.$$

Entonces, el único término que sobrevive es el correspondiente al coeficiente a_n, multiplicado por el factor $\lambda/2$; por lo que:

$$a_n = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\cos(nkx)dx. \tag{19}$$

De manera análoga, para determinar los coeficientes b_n, multiplicamos por

$$\text{sen}(nkx),$$

e integramos, quedando finalmente que:

$$b_n = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\text{sen}(nkx)dx. \tag{20}$$

El valor de cada uno de los coeficientes a_n y b_n indica qué tan importante es la contribución de la función armónica correspondiente para la "construcción" de la función f(x) original. Así, por ejemplo, una misma nota de sonido generada por diferentes instrumentos musicales suena diferente por que la contribución de los armónicos es diferente.

4. Ecuación de onda

En el caso del movimiento armónico simple (MAS) se estableció su ecuación característica,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_0^2 y, \tag{21}$$

en donde "y" es el desplazamiento respecto a la posición de equilibrio; y, ω_0 es la frecuencia angular de oscilación. Generalmente, cuando se hace el análisis "dinámico" sobre el movimiento de un objeto se llega a una expresión de la forma indicada en la ecuación 21, podemos señalar que el objeto tendrá un movimiento armónico simple. La ecuación 21 es la relación entre la aceleración y el desplazamiento respecto a la posición de equilibrio de un objeto.

Ahora procederemos a determinar la ecuación propia de un movimiento ondulatorio de una perturbación que se desplaza con rapidez de propagación v, sin distorsión, en una dimensión. Para fijar ideas, consideremos que las ondas son producidas en una cuerda, de tal manera que la variable "y" representa el "desplazamiento" de cada elemento de la cuerda respecto a su posición de equilibrio. Si se tratara de una onda armónica (ec. 11), el movimiento de cada elemento de la cuerda en el tiempo correspondería a un movimiento armónico simple, por lo que deberíamos de esperar que la ecuación de la onda involucrara a la aceleración de cada elemento de la cuerda de acuerdo a la ecuación 21, esto es:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y, \tag{22}$$

en donde la segunda derivada es "parcial" porque solo se deriva respecto al tiempo, permaneciendo x constante. Además, si consideramos la forma de la cuerda en un tiempo "fijo", esperaríamos una relación de la forma de la cuerda o concavidad con sus características de posición, esto significa que:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y, \tag{23}$$

en donde la segunda derivada es "parcial" respecto a la posición, permaneciendo t constante. De las dos ecuaciones anteriores tenemos la relación entre el espacio y el tiempo de la variable "y", dada por:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Utilizando la relación 10 para la rapidez de propagación, la ecuación de onda queda como:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.} \tag{24}$$

Esta relación representa la forma general de la ecuación de onda en una dimensión, en un medio sin dispersión. Las soluciones de la ecuación de onda son de la forma indicada en la ecuación 6,

$$y(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt).$$

es decir ondas que se propagan a la derecha o a la izquierda, y no solo ondas armónicas. Para mostrar que las funciones de la forma

$$y(x,t) = f(x \mp vt), \tag{25}$$

son soluciones de la ecuación de onda (ec. 24), consideremos que

$$y(x,t) = f(u),$$

siendo

$$u(x,t) = x \mp vt.$$

Jorge Eduardo Aguilar Rosas
Departamento de Matemáticas y Física
ITESO

Entonces, al tomar las derivadas de y(x,t) utilizando la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{df(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \mp v \frac{df(u)}{du}.$$

Para la segunda derivada queda:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\mp v \frac{df(u)}{du}\right]$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \mp v \frac{d}{du}\left[\frac{df(u)}{du}\right]\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 f(u)}{du^2}.$$

Procediendo de manera análoga para las derivadas de la variable "y" respecto a la posición obtenemos:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d^2 f(u)}{du^2}.$$

Entonces, de las dos últimas relaciones tenemos la ecuación de onda (ec. 24):

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.}$$

Si en el análisis de un sistema en una dimensión se llega a una relación de la forma indicada en la ecuación 24, podemos señalar que se tienen ondas viajando sin dispersión en el medio.