

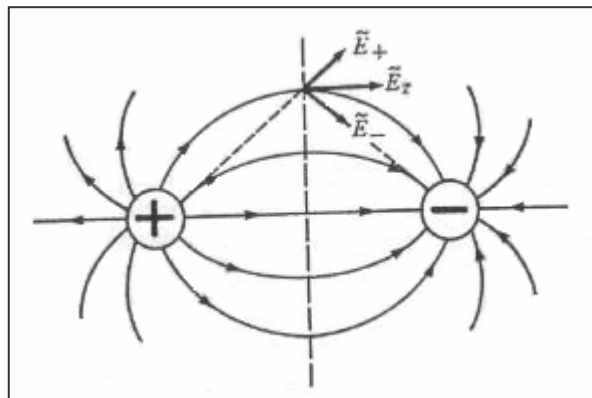


UNIVERSIDAD DIEGO PORTALES

Facultad de Ingeniería
Instituto de Ciencias Básicas

TÓPICOS DE
“ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO”

(Primera Versión)



(Incluye 110 problemas resueltos)

Julio Pozo Pérez y Rosa María Chorbadjian

2006

INDICE

CAPÍTULO I: FUERZA ELECTRICA Y CAMPO ELÉCTRICO.....03

1.1. Carga eléctrica.....03

1.2. Conductores y aisladores.....04

1.3. Fuerza eléctrica (Ley de Coulomb).....04

1.4. Densidad de carga eléctrica.....05

1.5. Campo Eléctrico.....07

1.6. Líneas de fuerza.....09

1.7. Problemas Resueltos.....11

CAPÍTULO II: LEY DE GAUSS.....28

2.2. Ley de Gauss.....28

2.1. Flujo eléctrico.....28

2.3 Problemas Resueltos.....29

CAPÍTULO III: EL POTENCIAL ELÉCTRICO.....47

3.1. Definición de diferencia de potencial.....47

3.2. Cálculo del potencial eléctrico a partir del campo eléctrico.....48

3.3. Potencial de una carga puntual.....48

3.4. Potencial debido a una distribución de carga.....49

3.5. Determinación del campo eléctrico a partir del potencial.....51

3.6. Problemas Resueltos55

CAPÍTULO IV: CONDENSADORES Y DIELECRICOS

CAPÍTULO V: CIRCUITOS ELÉCTRICOS

CAPÍTULO VI: EL CAMPO MAGNÉTICO

CAPÍTULO VII: LEY DE AMPERE - LEY DE BIOT-SAVART

CAPÍTULO VIII: LEY DE FARADAY

CAPÍTULO IX: INDUCTANCIA

CAPÍTULO X: PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LA MATERIA

CAPÍTULO XI: ECUACIONES DE MAXWELL

CAPÍTULO I

FUERZA ELECTRICA Y CAMPO ELÉCTRICO

1.1. Carga eléctrica

La carga eléctrica en sí durante el proceso de frotamiento no se crea, sólo existe una transferencia de carga negativa (electrones), de la lana a la ebonita. Por consiguiente, la ebonita queda cargada negativamente y la lana positivamente.

Una observación experimental es que **cuerpos con cargas de igual signo se repelen y con cargas de signos distintos se atraen (Ley de polaridad).**

La materia se compone de átomos y éstos a su vez de electrones, protones, neutrones y otras partículas que son de menor importancia en electrostática. Los átomos son eléctricamente neutros. Los electrones son partículas cargadas negativamente, los protones son partículas con cargas positivas. El átomo tiene igual número de electrones que de protones. Cuando decimos que un objeto está cargado, lo que queremos decir es que tiene un exceso de carga; que puede ser positiva (deficiencia de electrones) o negativa (exceso de electrones).

Experimentalmente se observa que **"la carga neta en un sistema cerrado se conserva"**, esto es el enunciado del **principio de la conservación de la carga.**

En el siglo pasado se creía que la carga eléctrica era un fluido continuo, pero a principios de este siglo, se descubrió que la carga eléctrica está dada en unidades o paquetes de cargas separadas, y esta propiedad de la carga eléctrica se conoce como **"cuantización de la carga"**. Esta carga básica es la carga del electrón que se representa simbólicamente por e , y su valor está dado $e = 1.60206 \times 10^{-19}$ [Coulomb].

Notación: las cargas macroscópicas se representan por q o Q y equivalen a $N e$ donde N es un número entero.

1.2. Conductores y aisladores

Respecto al comportamiento eléctrico, los materiales pueden clasificarse en general en dos clases: conductores y aisladores (dieléctricos) de la electricidad. Los conductores son sustancias metálicas, como el cobre, plata, fierro, etc., que contienen un gran número de portadores de carga libre. Estos portadores de carga (generalmente electrones) se mueven libremente en el conductor. Los dieléctricos, son materiales en los que las partículas cargadas no se mueven debido a que están fuertemente ligadas a las moléculas de las que forman parte, por ejemplo, vidrio, plástico, porcelana, etc.

1.3. Fuerza eléctrica (Ley de Coulomb)

Uno de los primeros científicos que realizó experimentos para el estudio cuantitativo de la fuerza de atracción o repulsión entre dos cargas puntuales, fue el científico francés Charles Augustin Coulomb (1736 - 1806). Utilizando una balanza de torsión, similar a la que utilizó posteriormente Cavendish para medir las atracciones gravitacionales. El experimento que realizó Coulomb fue diseñado con el propósito de analizar cómo la fuerza entre dos cargas puntuales varía con el producto de la magnitud de las cargas e inversamente a su separación elevada al cuadrado. Las cargas son representadas por q_1 y q_2 , y la separación entre las cargas por r . Coulomb encontró que la fuerza que ejercía una carga sobre la otra, estaba descrita por:

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.1)$$

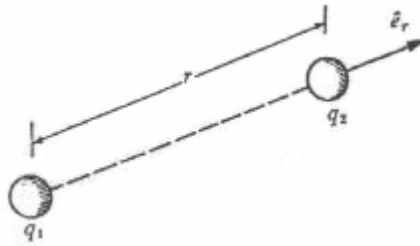
Donde K representa una constante de proporcionalidad cuyo valor dependerá del sistema de unidades que se utilice.

Esta expresión recibe el nombre de **Ley de Coulomb**. La ecuación (1.1) se puede escribir en forma vectorial como

$$\vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{e}_r \quad ; \quad \hat{e}_r = \frac{|\vec{r}|}{r} \Rightarrow |\hat{e}_r| = 1 \quad (1.2)$$

donde \hat{e}_r es el vector unitario a lo largo de r como se indica en la siguiente Fig.; el signo algebraico de q_1 y q_2 , son los que nos entregan el sentido de la fuerza, si q_1 y q_2 , son

positivos, el sentido de la fuerza en q_2 es en el sentido de \hat{e}_r ; si q_1 es negativa y q_2 es positiva, el sentido de \vec{F} es contraria a \hat{e}_r .



En el sistema SI la ley de Coulomb se puede escribir en la forma siguiente:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{e}_r \quad (1.3)$$

donde $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ y ϵ_0 , es una constante que se conoce como la **permitividad del vacío** o del espacio libre y su valor está dado por:

$$\epsilon_0 = 8.85415 \times 10^{-12} \left[\frac{C^2}{Nm^2} \right]$$

Para simplificar los cálculos se puede considerar:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \equiv 9 \times 10^9 [Nm^2/C^2]$$

Cuando se considera la interacción de un conjunto discreto formado por varias cargas puntuales y se desea saber la fuerza resultante sobre una carga específica, se encuentra que la fuerza total resultante es simplemente la suma vectorial de las fuerzas debidas a cada una de las cargas. Esto se conoce como el **Principio de Superposición**.

1.4. Densidad de carga eléctrica

Densidad de carga volumétrica. Cuando una carga eléctrica es distribuida en toda una región del espacio, podemos definir la densidad de carga eléctrica promedio como la carga total en la región dividida por el volumen de la región. La densidad de la carga eléctrica se simboliza por

“ ρ ” y tiene las unidades de $[C/m^3]$, cuando el volumen ν contiene la carga total q , entonces la densidad de carga promedio es:

$$\rho_{prom} = \frac{q}{\nu} \quad (1.4)$$

La carga total se puede encontrar a partir del volumen y la densidad de carga promedio, es decir:

$$q = \rho_{prom} \nu$$

Estas relaciones son similares a la definición de la densidad de la masa.

En la interacción entre cargas, supongamos que lleguen a un arreglo equilibrado en el cuál la fuerza neta actuando en cada carga sea cero; por lo tanto, es frecuente encontrar distribuciones de carga que no son uniformes. Podemos definir la densidad de la carga variable en función de la posición, esto es:

$$q = q(\tilde{r}) \quad \text{donde} \quad \tilde{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

que describe la presencia de cargas infinitesimales (dq en cada región infinitesimal) del espacio con volumen $d\nu$; es decir que podemos expresar la densidad de la carga como:

$$\rho(r) = \lim_{\Delta\nu \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta\nu} = \frac{dq}{d\nu} \quad (1.5)$$

Si la densidad de la carga no es función de la posición, entonces es constante; si se asume que el límite existe y es independiente de los detalles de la subdivisión se puede escribir:

$$q = \iiint \rho(r) d\nu \quad (1.6)$$

El diferencial de volumen $d\nu$ puede expresarse en diferentes sistemas de coordenadas dependiendo del problema en cuestión (cartesianas, esféricas y cilíndricas).

Densidad de carga lineal y superficial. Si la región cargada eléctricamente es muy delgada comparada con su longitud y distante de otros cuerpos, entonces se puede representar por una línea matemática (ideal), con una distribución de carga unidimensional λ , definida mediante

$$\lambda(l) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad (1.7)$$

de donde se tiene que

$$q = \int \lambda(l) dl \quad (1.8)$$

si λ es independiente de l o constante, entonces:

$$q = \lambda \int_0^L dt = \lambda L$$

La densidad de carga lineal está expresada en unidades de [C/m].

Si la carga se encuentra distribuida sobre una superficie en una región del espacio distante de otros cuerpos se puede representar matemáticamente por la siguiente expresión:

$$\sigma(r) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds} \quad (1.9)$$

de donde se obtiene

$$q = \iint \sigma(r) ds \quad (1.10)$$

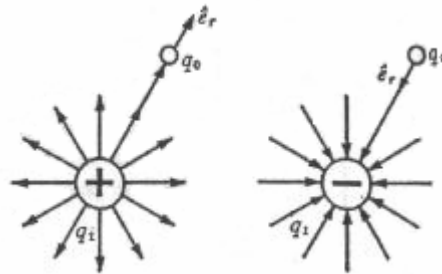
El diferencial de superficie se debe expresar en sus coordenadas apropiadas. La densidad de carga superficial está dada en unidades de [C/m²].

1.5. Campo Eléctrico (\vec{E})

Cuando una carga eléctrica experimenta una fuerza de atracción o repulsión (en ausencia de campos gravitacionales y magnéticos) en una región del espacio, existe un campo eléctrico en esa región. La magnitud del campo eléctrico dependerá de la magnitud de la fuerza eléctrica y de la magnitud de la carga prueba (carga que experimenta la fuerza). La fuerza eléctrica puede ser generada por cargas aisladas o bien por una distribución de carga.

Supongamos que la fuerza se debe a una carga aislada, entonces se observa experimentalmente que la atracción o repulsión sobre la carga de prueba es radial y se puede dibujar líneas radiales a la carga que representen gráficamente la dirección de repulsión o atracción, estas

líneas radiales se conocen como líneas de campo (las cuales son imaginarias) que salen de las cargas positivas y entran a las cargas negativas como se muestran en la figura.



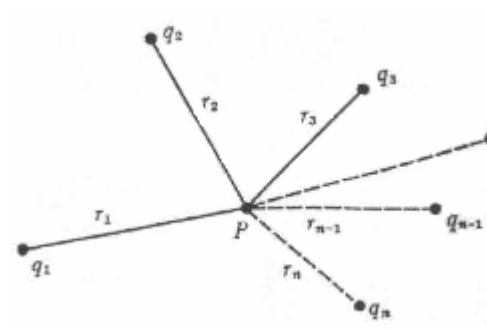
El campo eléctrico se define como la razón de la fuerza eléctrica \vec{F} (que experimenta la carga prueba), por unidad de **carga prueba (q_0) que por definición se considera positiva**. Esto es:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

De la Fig. anterior se observa que la dirección de la fuerza está en la dirección del campo.

Si se tiene una carga punto q_1 , y a una distancia r se encuentra una carga prueba q_0 , se puede emplear la ley de Coulomb, ecuación (1.3). Para obtener que:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_0}{r^2} \hat{e}_r$$



Si se divide ambos lados de la ecuación por q_0 se obtendrá una expresión del campo eléctrico para cargas aisladas.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{e}_r \tag{1.12}$$

Para determinar el campo eléctrico en el punto P , debido a la presencia de un conjunto discreto de cargas puntuales se utiliza el **principio de superposición** el cual consiste en la suma vectorial de los campos en el punto P , dado por

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \frac{\vec{F}_i}{q_0} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{e}_i \quad (1.13)$$

Donde q_i representa la carga de cada una, y r_i la distancia de las cargas al punto donde se desea calcular el campo.

Determinación del campo eléctrico para distribuciones continuas

Tomando el límite continuo de la ecuación (1.13) que consiste en escribir:

$$\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \rightarrow \int \frac{dq}{r^2} \quad (1.14)$$

Se obtiene que el campo para una distribución continua de carga, está dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{e}_r \quad (1.15)$$

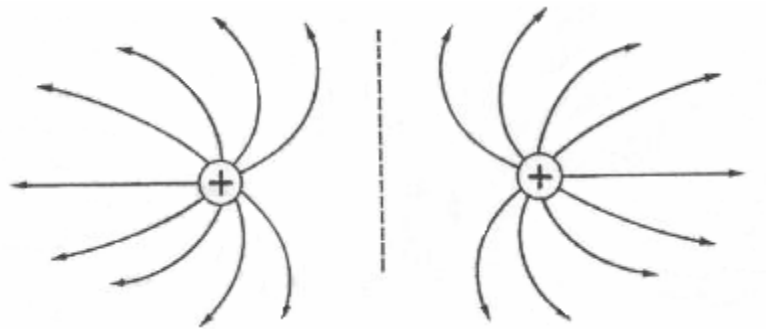
donde

$$dq = \begin{cases} \lambda dl & (\text{distribución lineal}) \\ \sigma ds & (\text{distribución superficial}) \\ \rho dv & (\text{distribución volumétrica}) \end{cases}$$

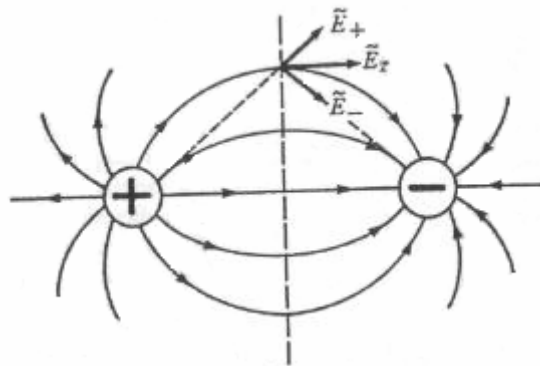
dq es una diferencial de carga, r es la distancia entre el diferencial de carga y el punto donde se desea calcular el campo y \hat{e}_r es el vector unitario que nos indica la dirección del campo, siguiendo la trayectoria de r .

1.6. Líneas de fuerza

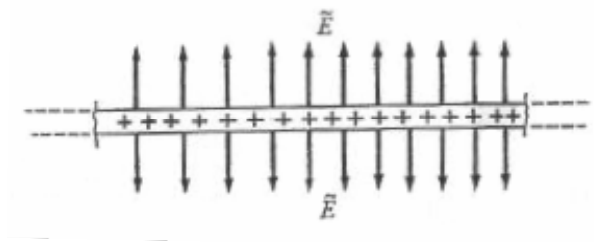
Las líneas de fuerza o líneas de campo son líneas imaginarias trazadas de tal forma, que la tangente en un punto coincide con la dirección del campo eléctrico en dicho punto.



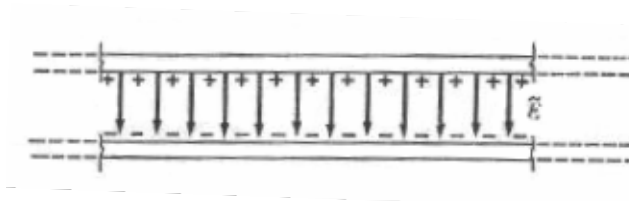
a) Dos cargas iguales.



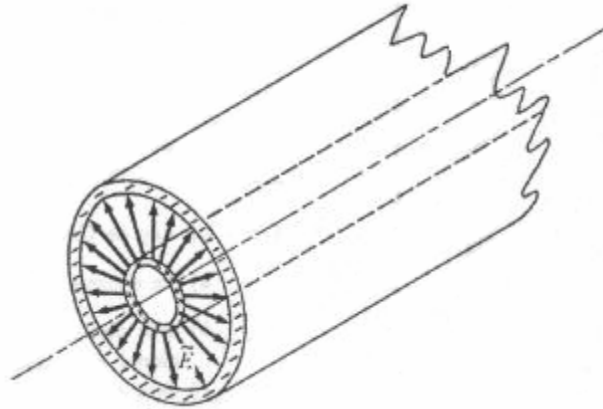
b) Dipolo eléctrico.



c) Placa cargada.



d) Dos placas paralelas con la misma densidad de carga, y signo contrario.



e) Cascarones cilíndricos concéntricos con la misma carga total, de signos contrarios.

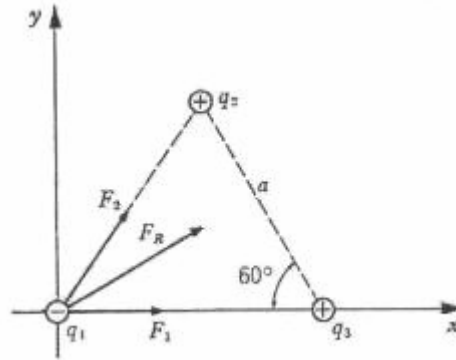
Al analizar los diagramas de la Fig. anteriores para diferentes distribuciones de carga, se observa que:

1. Las líneas de Fuerza comienzan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas.
2. La tangente a la línea de fuerza en cualquier punto es paralela a la dirección del campo eléctrico en ese punto.
3. El número de líneas de fuerza por unidad de área en una región del espacio está en relación directa a la magnitud del campo eléctrico. A mayor número de líneas de fuerza por unidad de área, mayor la magnitud del campo.
4. Las líneas de fuerza nunca se cruzan.

1.7. Problemas resueltos

Problema 1.1

En cada uno de los vértices de un triángulo equilátero de lado $a = 1$ m se tienen las siguientes cargas $q_1 = -2 \times 10^{-6}$ C, $q_2 = 1 \times 10^{-6}$ C, $q_3 = 1 \times 10^{-6}$ C. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre q_1 ?



Solución:

De acuerdo con el principio de superposición:

$$\vec{F}_R = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$$

Del diagrama vectorial de la Fig. anterior:

$$F_x = F_1 + F_2 \cos 60^\circ$$

$$F_y = F_2 \text{ sen } 60^\circ$$

de la aplicación de la Ley de Coulomb, se puede escribir que :

$$F_x = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{a^2} + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{a^2} \cos 60^\circ$$

dado que $q_2 = q_3$, se tiene que

$$F_x = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{a^2} (1 + \cos 60^\circ)$$

$$F_y = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{a^2} \text{ sen } 60^\circ$$

Teniendo presente que $K = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \times 10^9 [Nm^2 / C^2]$. Sustituyendo los datos se tiene:

$$F_x = \left(9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \right) \left(\frac{-2 \times 10^{-12} C^2}{1 m^2} \right) (1 + 0.5)$$

$$F_x = -27 \times 10^{-3} [N]$$

$$F_y = \left(9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\right) \left(\frac{-2 \times 10^{-12} C^2}{1 m^2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -15.58 \times 10^{-3} [N]$$

La fuerza resultante escrita en forma vectorial es:

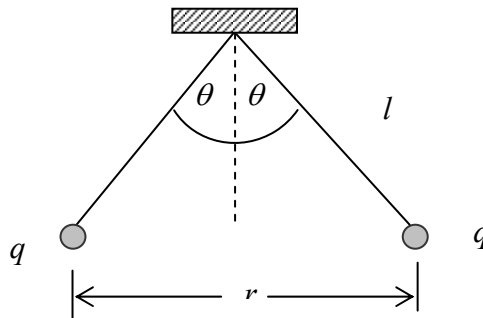
$$\vec{F}_R = (27 \times 10^{-3} \hat{e}_x + 15.58 \times 10^{-3} \hat{e}_y) [N]$$

Problema 1.2

Para el sistema de la figura formado por dos péndulos idénticos, cargados con cargas iguales q y de masas iguales m .

Determine:

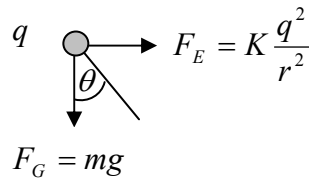
- a) El valor del Angulo θ para que el sistema se encuentre en equilibrio.
- b) La distancia de separación x , entre las cargas para ángulos pequeños.



$$\text{sen}\theta = \frac{r/2}{l}$$

Solución:

- a) Del DCL de la carga del lado derecho de la figura anterior, se tiene



De la figura anterior

$$F_E = F_G \tan \theta$$

Sustituyendo los valores de las fuerzas respectivas y sabiendo a partir de la primera figura que $r = 2l \sin \theta$, se obtiene

$$K \frac{q^2}{(2l \sin \theta)^2} = mg \tan \theta$$

de donde se encuentra que

$$\sin^2 \theta \tan \theta = \frac{Kq^2}{4l^2 mg}$$

b) Para ángulos pequeños se tiene: $\tan \theta \approx \sin \theta = \frac{x/2}{l}$. Entonces, reemplazando en la ecuación anterior, se encuentra

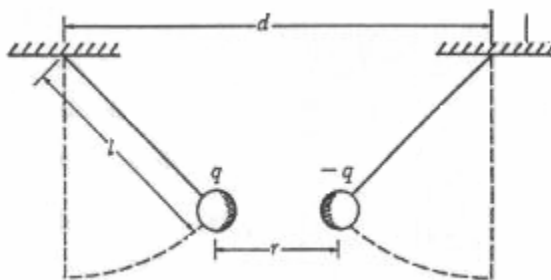
$$\frac{x^3}{8l^3} = \frac{Kq^2}{4l^2 mg} \Rightarrow x^3 = \frac{2lKq^2}{mg} \quad ; \quad K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

luego

$$x = \left(\frac{lq^2}{2\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3}$$

Problema 1.3

Dos partículas de igual masa m , están suspendidas por cuerdas de longitud l de puntos separados, una distancia d como se muestra en la figura. Calcule la magnitud de cada carga si la distancia horizontal que separa las partículas es r .



Solución:

Siguiendo el mismo procedimiento que el empleado en el problema anterior (1.2), también se puede escribir

$$F_E = F_G \tan \theta$$

Sustituyendo los valores de las fuerzas respectivas

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} = mg \tan \theta \equiv mg \frac{\text{sen} \theta}{\text{cos} \theta}$$

de donde se encuentra
$$q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 r^2 mg \frac{\text{sen} \theta}{\text{cos} \theta}}$$

por otro lado, de la figura anterior, se tiene que

$$2l \text{sen} \theta + r = d \Rightarrow \text{sen} \theta = \left(\frac{d-r}{2l} \right)$$

expresando $\text{cos} \theta = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta}$, después de sustituir, se obtiene

$$q = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 mgr^2 [(d-r)/2]}{\{l^2 - [(d-r)/2]^2\}^{1/2}}}$$

Problema 1.4

Si se tiene una esfera dieléctrica de radio R con una densidad de carga volumétrica $\rho = A$ [C/m^3]; donde A es constante. Calcule la carga total encerrada en la esfera.

Solución:

Utilizando la ecuación (1.6) tenemos que $\rho = A$ entonces:

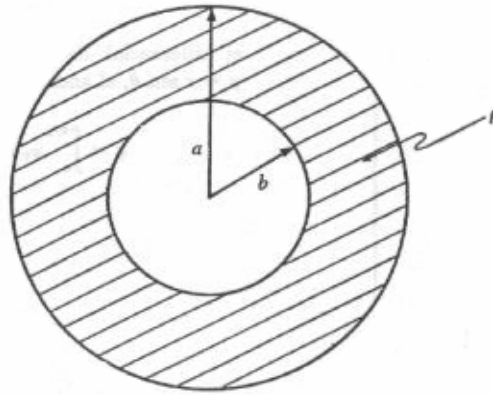
$$q = \iiint A \, dV = A \iiint dV$$

Dado que el volumen de una esfera es $4/3 \pi R^3$, entonces

$$q = 4/3 \pi R^3 A.$$

Problema 1.5

Una esfera maciza, no conductora, de radio a , con una cavidad esférica de radio b , como se muestra en la figura, tiene una distribución de carga volumétrica $\rho = A/r^3$ donde A es una constante. Calcule la carga que se encuentra en la esfera.



Solución:

Utilizando la ecuación (1.6), se tiene que:

$$q = \iiint \rho \, dV$$

En coordenadas esféricas $dV = r^2 \, dr \, \sin\theta \, d\theta \, d\phi$, entonces

$$q = \iiint \rho \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_b^a \frac{A}{r^3} r^2 \, dr \, \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

Luego

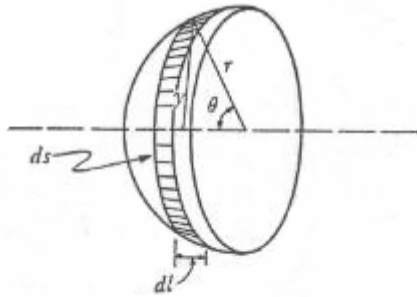
$$q = 4\pi A \int_b^a \frac{dr}{r}$$

De donde se encuentra que la carga en la esfera es:

$$q = 4\pi A \, \ln \frac{a}{b}$$

Problema 1.6

Una semiesfera hueca dieléctrica tiene una distribución de carga eléctrica $\sigma(\theta) = \sigma_0 \text{sen}\theta$, donde σ_0 está expresada en $[\text{C}/\text{m}^2]$. Calcule la carga total que se encuentra en la semiesfera hueca.



Solución:

Para una distribución superficial de carga se tiene que

:

$$q = \iint \sigma(\theta) ds$$

en esta caso $ds = r^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi$. Sustituyendo, se obtiene

$$q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\sigma_0 \text{sen}\theta) r^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi$$

$$q = \sigma_0 r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\theta d\theta$$

$$q = \sigma_0 2\pi r^2 \frac{1}{2} [\theta - \text{sen}\theta \cos\theta]_0^{\pi/2}$$

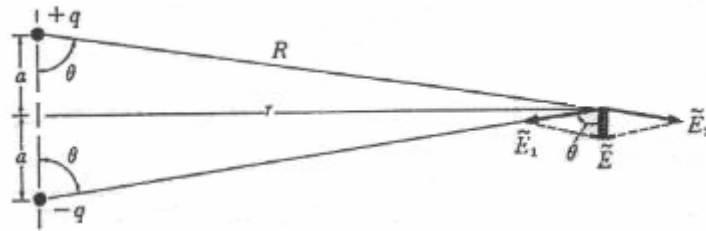
evaluando:

$$q = \frac{1}{2} \sigma_0 \pi^2 r^2 \text{ [C]}.$$

Esta expresión nos muestra que la carga total que no está distribuida uniformemente.

Problema 1.7

Dipolo eléctrico. Se tienen dos cargas iguales de signo contrario separadas por una distancia pequeña, como se muestra en la figura, esta configuración se conoce como Dipolo eléctrico. Suponiendo que $r \gg a$, calcule el campo eléctrico debido a estas cargas en un punto localizado a una distancia r del centro del dipolo, según la perpendicular bisectriz de la línea que une las cargas. (donde $R = \sqrt{a^2 + r^2}$)



Solución:

De acuerdo con el principio de superposición:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Según la ecuación 1.12:

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

De la Fig.

$$E = 2 E_1 \cos\theta$$

donde $\cos\theta = \frac{a}{R}$.

Sustituyendo los valores de E_1 , R y de $\cos\theta$, se obtiene:

$$E = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(a^2 + r^2)} \frac{a}{(a^2 + r^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2aq}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

Para el caso en que $a \ll r$, entonces, se puede omitir el a del denominador y la magnitud del campo eléctrico para el dipolo está dada por:

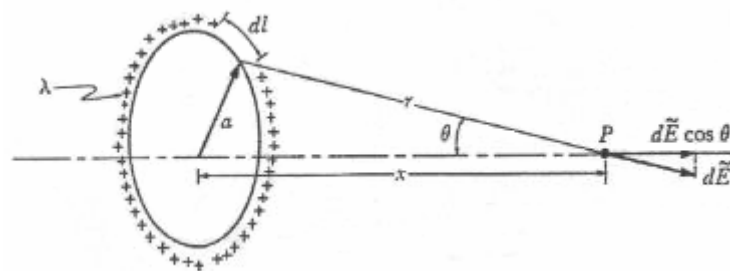
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2aq}{r^3}$$

El producto $2aq$ se conoce como momento del dipolo eléctrico P , y en general para el cálculo del campo eléctrico nunca se trabaja con los factores q y $2a$ separados, sino siempre con el producto que se sustituye por P . Para el caso en, el cual $r \gg a$ el campo del dipolo se puede escribir como:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{r^3}$$

Problema 1.8

Se tiene un **anillo de radio a** , cargado positivamente con una distribución de carga uniforme lineal λ . Calcular E a una distancia x sobre el eje del anillo a partir de su centro. (ver Fig.).



Solución:

De la definición de densidad lineal de carga, se tiene que

$$dq = \lambda dl$$

lo cual producirá un diferencial de campo eléctrico en el punto en cuestión, que de acuerdo con la ecuación (1.14), resulta:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(a^2 + x^2)}$$

de la Fig. se puede ver que al integrar, la componente perpendicular al eje se anula quedando solamente la componente colineal, de aquí que:

$$E = \int dE \cos \theta$$

donde:

$$\cos \theta = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

entonces:

$$E = \int \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + x^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi a} dl$$

Integrando y evaluando

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi a \lambda x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

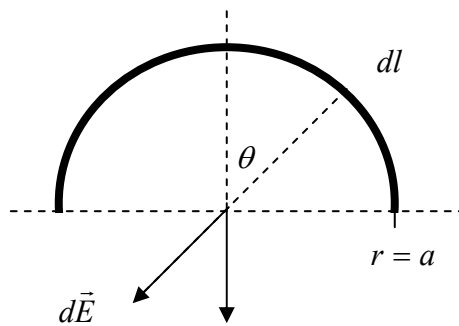
Para $x \gg a$, se tiene que

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi a \lambda}{x^2}$$

donde $2\pi a \lambda$ representa la carga total del anillo. Del resultado anterior se puede concluir que para grandes distancias, el anillo se comporta como una carga puntual.

Problema 1.9

Considere un **arco semicircular** como el de la figura, cargado uniformemente con una densidad lineal λ . Determine el campo eléctrico en el centro de curvatura del arco.



Solución:

De la figura se tiene

$$dE_y = dE \cos \theta$$

por simetría $E_x = 0$

Por otro lado, de la definición de campo eléctrico se obtiene que

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$

sustituyendo en la ecuación anterior, se puede escribir

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos\theta$$

para este caso $dq = \lambda dl$, donde, $dl = a d\theta$ y $r = a$, entonces

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a d\theta}{a^2} \cos\theta$$

Integrando

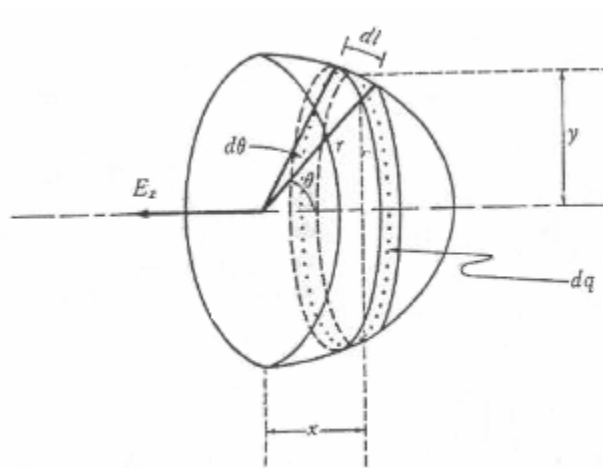
$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

En forma vectorial

$$\vec{E}_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} (-\hat{e}_y)$$

Problema 1.10

La **mitad de un cascarón esférico**, no conductor de radio interior r , tiene una carga total Q distribuida uniformemente en su superficie interior. Calcular el campo eléctrico en el centro de curvatura.



Solución:

De la figura se ve que por simetría $E_y = 0$, (ver problema anterior), entonces se puede escribir

$$dE_x = dE \cos\theta$$

De la ecuación (1.15), se tiene que

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$

$$dE_x = dE \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos\theta$$

Sabiendo que $dq = \sigma ds$ e integrando se obtiene

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma ds}{r^2} \cos\theta$$

dado que $ds = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$, se tiene

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma ds}{r^2} \cos\theta = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi$$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta$$

como $\int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta = \frac{1}{2}$, se tiene

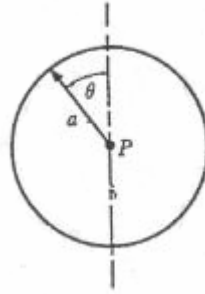
$$E_x = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

dado que $\sigma = \frac{Q}{2\pi r^2}$, sustituyendo se encuentra

$$E_x = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 r^2}$$

Problema 1.11

Para un anillo circular de radio a con una distribución de carga lineal $\lambda = \lambda_0(1 + \cos\theta)$ como el de la Fig. Calcule la carga total del anillo.



Solución:

Para esta caso la carga eléctrica se determina a partir de

$$q = \int \lambda dl$$

donde $\lambda = \lambda_0(1 + \cos \theta)$ y de la figura se tiene que $dl = ad\theta$

Reemplazando se encuentra

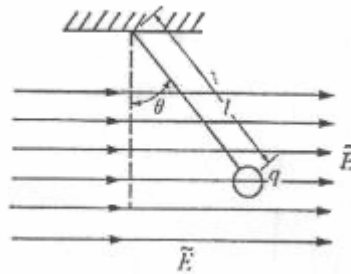
$$q = \int_0^{2\pi} \lambda_0(1 + \cos \theta) ad\theta$$

de donde se obtiene que

$$q = 2\pi a \lambda_0$$

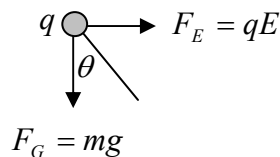
Problema 1.12

Una esferita no conductora con una carga q , cuelga de un hilo de longitud l dentro de un campo eléctrico E . Calcule la masa de la esferita si el ángulo entre la vertical y el hilo es θ



Solución:

a) Del DCL de la carga se tiene



De la figura anterior $F_E = F_G \tan \theta$

Sustituyendo lo valores de las fuerzas, se tiene

$$qE = mg \tan \theta$$

de donde se encuentra

$$m = \frac{qE}{g \tan \theta}$$

Problema 1.13

Determine la carga en el volumen definido por $1 \leq r \leq 2$ [m] en coordenadas esféricas si:

$$\rho = \frac{5 \cos^2 \phi}{r^4} [C/m^3]$$

Solución:

La carga en un volumen está dada por

$$q = \iiint \rho d\nu$$

donde $d\nu =$ (en coordenadas esféricas), luego

$$q = \iiint \rho d\nu = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^2 \frac{5 \cos^2 \phi}{r^4} r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

$$q = 5 \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_1^2 r^{-2} dr$$

Dado que $\cos^2 \phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\phi)$, se tiene

$$q = 5 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\phi) \right) d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_1^2 r^{-2} dr = 5(\pi)(2) \left(\frac{1}{2} \right) = 5\pi [C]$$

Problema 1.14

Demuestre que la magnitud máxima del campo eléctrico a lo largo del eje de un anillo cargado uniformemente ocurre cuando $x = a/\sqrt{2}$ y tiene un valor de $E = \frac{Q}{6\pi \epsilon_0 \sqrt{3}a^2}$

Solución:

El campo eléctrico para este caso es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Derivando con respecto a x e igualando a cero se obtiene

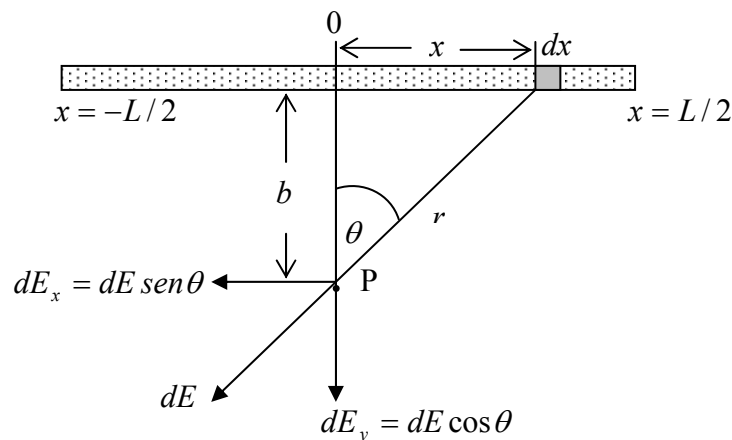
$$x = a/\sqrt{2}$$

Evaluando el valor del campo en $x = a/\sqrt{2}$, se encuentra

$$E = \frac{Q}{6\pi \epsilon_0 \sqrt{3}a^2}$$

Problema 1.15

Una varilla de longitud L no conductora tiene una distribución de carga lineal uniforme λ . Determine el campo eléctrico en el punto P a una distancia b sobre la perpendicular bisectriz.



Solución:

De la figura se tiene que

$$dE_y = dE \cos \theta$$

$$dE_x = dE \sin \theta$$

la componente $E_x = 0$ por simetría

como $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$, se tiene que

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$

$$dE_y = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos \theta$$

Para esta caso $dq = \lambda dx$, y $\cos \theta = b/r$, luego sustituyendo se tiene

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx b}{r^2 r} = \frac{\lambda b}{4\pi\epsilon_0} \frac{dx}{r^3}$$

como $r = (x^2 + b^2)^{1/2}$ se obtiene

$$dE_y = \frac{\lambda b}{4\pi\epsilon_0} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}}$$

Integrando

$$E_y = \frac{\lambda b}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}}$$

Dado que $\int \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{x}{b^2(x^2 + b^2)^{1/2}}$, se encuentra

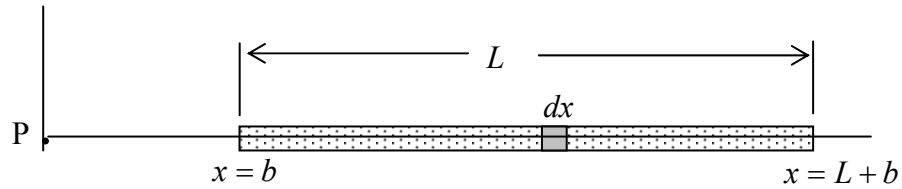
$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 b} \frac{L}{(L^2/4 + b^2)^{1/2}}$$

También se puede escribir

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 b} \frac{L}{(L^2 + 4b^2)^{1/2}}$$

Problema 1.16

Determine el campo eléctrico en un punto P ubicado a una distancia b del extremo izquierdo de la barra del problema anterior.



Solución:

Teniendo presente el problema anterior, se puede escribir

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2}$$

Integrando se encuentra

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_b^{L+b} \frac{dx}{x^2} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{L+b} - \frac{1}{b} \right]$$

CAPÍTULO II

LEY DE GAUSS

La Ley de Gauss permite determinar el campo eléctrico cuando las distribuciones de cargas presentan simetría, en caso contrario se debe recurrir a la Ley de Coulomb.

2.1. Flujo eléctrico

El flujo eléctrico se define como el número de líneas de campo que atraviesa a una superficie dada y que depende únicamente de la carga encerrada, el cual está representado por la siguiente ecuación:

$$\Phi = \iint E \cos \theta \, ds \quad (2.1)$$

Donde θ es el ángulo entre el vector campo eléctrico \vec{E} y el vector área $d\vec{s}$, luego

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.2)$$

El flujo eléctrico para una superficie cerrada se expresa como:

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.3)$$

2.2. Ley de Gauss

El flujo eléctrico producido por una carga puntual en una superficie imaginaria cerrada (superficie gaussiana) de radio r , se puede calcular con la ecuación (2.3) obteniéndose:

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \Phi \equiv \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico que cruza la superficie gaussiana es igual a la **carga neta encerrada** (q_{enc}) por la superficie por unidad de la constante de permitividad (ϵ_0).

La ley de Gauss puede ser expresada de forma más general de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int dq$$

donde $dq = \rho dv$ (para la carga en el volumen v), luego

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dv$$

También se puede escribir:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint \sigma ds \quad (\text{para la carga en una superficie } dq = \sigma ds)$$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \lambda dl \quad (\text{para la carga en una línea } dq = \lambda dl)$$

2.2. Problemas resueltos

Problema 2.1

Escriba la Ley de Gauss (eléctrica) en forma diferencial.

Solución:

La ley de Gauss escrita en forma integral está dada por

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dv = \iiint (\rho / \epsilon_0) dv$$

Utilizando el teorema de la divergencia

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dv$$

Comparando las dos últimas ecuaciones, se encuentra

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

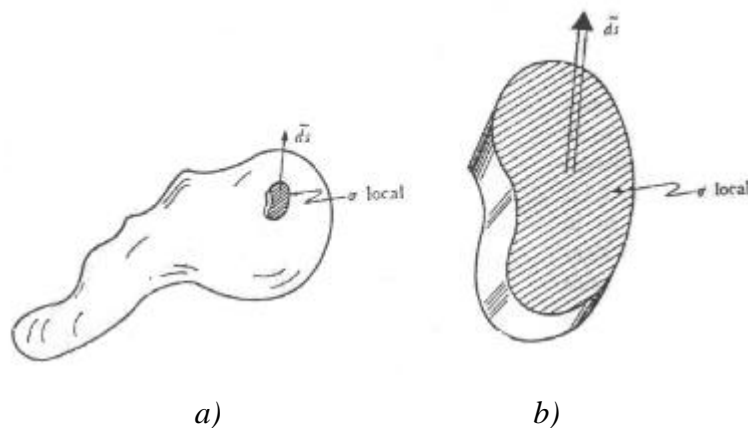
La expresión anterior, se conoce con el nombre de forma diferencial de la ley de Gauss eléctrica, y forma parte de una de las ecuaciones de Maxwell, que a su vez corresponde a una de las cuatro ecuaciones fundamentales del electromagnetismo.

Problema 2.2

Determine el campo eléctrico en la vecindad de un conductor de forma arbitraria.

Solución:

Consideremos un conductor de forma arbitraria como el de la siguiente figura a), sobre el cual queremos calcular el campo en un punto muy cercano a su superficie.



Si se considera una superficie gaussiana de la forma mostrada en la anterior b) se tiene que la carga encerrada es σds y aplicando la Ley de Gauss:

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{dq}{\epsilon_0}$$

donde

$$dq = \sigma ds$$

sustituyendo se tiene:

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} ds ;$$

como el campo es paralelo al diferencial de superficie en la vecindad del conductor obtendremos:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Observe que el campo eléctrico para puntos cercanos a la superficie es constante.

Problema 2.3

Una **esfera maciza no conductora** de radio b , con una cavidad esférica de radio a , tiene una distribución uniforme de carga y su carga total es Q ; Determinar el campo eléctrico en las regiones que se indican:

a) $r < a$ b) $a < r < b$ c) $r > b$.

Solución:

a) Para $r < a$:

Primeramente se escoge una superficie gaussiana esférica de radio r , y aplicando la Ley de Gauss, ecuación (2.6) se tiene que la carga neta encerrada es cero, entonces, $E = 0$.

b) Para $a < r < b$:

Igual que en (a), se elige una superficie gaussiana esférica de radio r y de la Ley de Gauss:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

Como la distribución de carga es uniforme, entonces:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \iiint_V dV = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi (r^3 - a^3)$$

Dado que

$$\rho = \frac{Q}{(4\pi/3)(b^3 - a^3)}$$

Reemplazando este valor se obtiene

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{(r^3 - a^3)}{(b^3 - a^3)}$$

Además como $\vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{s}$ se tiene que $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E ds$ y como el modulo del campo eléctrico es constante en toda la superficie gaussiana, luego

$$E (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{(r^3 - a^3)}{(b^3 - a^3)}$$

de donde se encuentra

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{(r^3 - a^3)}{(b^3 - a^3)}$$

En notación vectorial:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{(r^3 - a^3)}{(b^3 - a^3)} \hat{e}_r$$

c) Para $r > b$:

Se elige también una superficie gaussiana de radio r , la carga neta encerrada es Q , entonces:

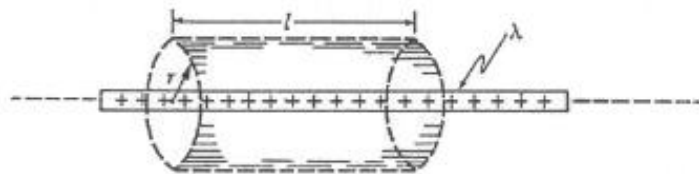
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Integrando y despejando E obtenemos que

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Problema 2.4

Línea de carga. En la siguiente figura, se tiene una **línea de carga de longitud infinita** con una densidad lineal de carga λ uniforme. ¿Cuál es el campo eléctrico E , a una distancia r de la línea?



Solución:

Una superficie gaussiana conveniente es un cilindro circular de radio r y una longitud l , como se muestra en la figura anterior. Aplicando la Ley de Gauss:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \lambda dl$$

que se puede desarrollar en este caso para las tres partes del cilindro de la siguiente forma:

$$\iint_{\text{tapas circulares}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{\text{sup.cilíndrica}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \lambda dl$$

para el primer término se puede ver que el producto punto es cero ($\vec{E} \perp d\vec{s}$)_{tapas}, entonces:

$$\iint_{\text{sup.cilíndrica}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^l \lambda dl = \lambda l$$

Dado que el campo eléctrico es constante en la superficie y ($\vec{E} \parallel d\vec{s}$), se encuentra

$$E(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

de donde

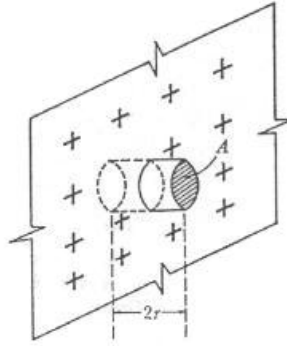
$$E = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

En notación vectorial:

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{e}_r$$

Problema 2.5

Lámina de carga. Se tiene una **lámina delgada no conductora** de dimensiones infinitas con una densidad de carga superficial σ (ver figura). Calcúlese el campo eléctrico E , a una distancia r del plano.



Solución:

Para este problema, podemos escoger como superficie gaussiana un cilindro circular de sección transversal A y largo $2r$, colocado como se muestra en la figura anterior. Aplicando la Ley de Gauss:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{\text{Tapa Izq.}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{\text{Manto.}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{\text{Tapa derecha.}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint \sigma ds$$

Sabiendo que $(\vec{E} \perp d\vec{s})_{\text{Manto}}$, entonces, $(\vec{E} \cdot d\vec{s})_{\text{Manto}} = 0$, luego:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{\text{Tapa Izq.}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{\text{Tapa derecha.}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint \sigma ds$$

como $(\vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{s})_{\text{Tapas}}$, se tiene que $(\vec{E} \cdot d\vec{s})_{\text{Tapas}} = E ds$, además que $E \equiv |\vec{E}|$ y σ son constantes, entonces:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \iint_A ds + E \iint_A ds = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \iint_A ds$$

Luego
$$EA + EA = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = Cte$$

Problema 2.6

Determine el campo eléctrico en las vecindades de una **lámina metálica delgada conductora**, de dimensiones infinitas, cargada con $\sigma = cte$

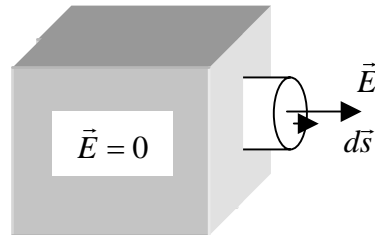
Solución

Por tratarse una placa metálica pero que es delgada, ésta se comporta igual que la lámina delgada del **problema anterior**, debiéndose realizar el mismo cálculo para obtener

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = Cte$$

Problema 2.7 (Placa o lámina de carga gruesa)

Se tiene una **placa gruesa conductora** de dimensiones infinitas con una densidad de carga superficial σ (ver figura). Calcúlese el campo eléctrico E , a una distancia r del borde.



Solución:

Aplicando la Ley de Gauss a la superficie cilíndrica de la figura, se tiene que

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} \equiv \iint_{\text{Tapa Izquierda}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{\text{Manto}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{\text{Tapa Derecha}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = q/\epsilon_0$$

Dado que: $\vec{E}_{\text{Tapa Izquierda}} = 0$ (la tapa está dentro del material conductor)

$$\vec{E}_{\text{Manto}} \perp d\vec{s} \Rightarrow (\vec{E} \cdot d\vec{s})_{\text{Manto}} = 0$$

Entonces, sólo queda el campo en la tapa circular derecha

$$\iint_{\text{Tapa derecha}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = q/\epsilon_0$$

Dado que el campo y el vector de área, son paralelos y además el campo es constante, se obtiene:

$$EA = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

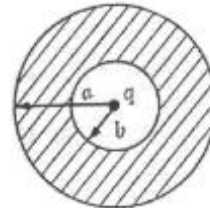
En notación vectorial:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{e}_r$$

Problema 2.8

Una esfera metálica maciza de radio exterior a , con una cavidad esférica de radio b , tiene una carga puntual q en su centro como se muestra en la siguiente figura, calcule el flujo eléctrico para:

- a) $r < b$ b) $b < r < a$ c) $r > a$.



Solución:

a) De la Ley de Gauss se tiene que

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} \equiv \frac{q_{Encerrada}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi(a < r < b) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad ; \quad q_{encerrada} = q$$

b) $\Phi(r < a) = 0 \quad ; \quad q_{encerrada} = 0$

c) $\Phi(r > b) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad ; \quad q_{encerrada} = q$

Problema 2.9

Dentro de una esfera maciza no conductora de radio a , hay un campo eléctrico (E_0) radial de magnitud constante. Demuestre que la distribución de carga está dada por:

$$\rho = \frac{2\epsilon_0 E_0}{r} \quad \text{para} \quad 0 < r < a$$

Solución:

Utilizando la Ley de Gauss escrita en la forma diferencial,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

Expresando la divergencia en coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (E_\phi)$$

Dado que el campo sólo tiene una componente radial, $E_r = E_0 = Cte$, se obtiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_0) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Luego

$$\frac{2E_0}{r} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \rho(r) = \frac{2\epsilon_0 E_0}{r}$$

Problema 2.10

Considere el caso de un **cilindro de longitud infinita**, de radio R, **uniformemente cargado** con densidad volumétrica de carga ρ . Determine

- a) $E(r < R)$; (r es la distancia de un punto cualquiera al eje del cilindro)
- b) $E(r > R)$

Solución:

a) De la Ley de Gauss

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV$$

se tiene que

$$E(2\pi r h) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \pi r^2 h$$

De donde se encuentra que

$$E(r < R) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$$

b) En este caso, de la Ley de Gauss se obtiene

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV$$

$$E(2\pi r h) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \pi R^2 h$$

$$E(r > R) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Problema 2.11

Considere el caso de un **cilindro macizo muy largo**, de radio R , cargado con densidad volumétrica de carga variable dada por $\rho = \rho_0 r$. Determine

- a) $E(r < R)$; (r es la distancia de un punto cualquiera al eje del cilindro)
- b) $E(r > R)$

Solución:

a) De la Ley de Gauss

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dv$$

se tiene que

$$E(2\pi rh) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho_0 r r dr d\phi dz$$

De donde se encuentra que

$$E(2\pi rh) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} 2\pi h \frac{r^3}{3}$$

$$E(r < R) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r^2$$

b) En este caso, de la Ley de Gauss se obtiene

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dv$$

En coordenadas cilíndricas se tiene $dv = r dr d\phi dz$, entonces

$$E(2\pi rh) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho_0 r r dr d\phi dz$$

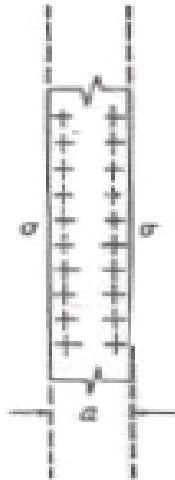
De donde se encuentra que

$$E(2\pi rh) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} 2\pi h \frac{R^3}{3}$$

$$E(r > R) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Problema 2.12

Dos láminas paralelas conductoras con una distribución de carga uniforme σ , cargadas positivamente, están separadas una distancia como se muestra en la siguiente figura. Encuentre a) el campo entre las láminas b) Fuera de las láminas. Considere la distancia entre las láminas muy pequeñas, comparada con las dimensiones de las láminas.



Solución:

a) Aplicando la Ley de Gauss y teniendo presente el problema (2.6), se tiene que el campo eléctrico producido por una lámina conductora es sus cercanías (vecindades) es:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Entonces del principio de superposición para un punto ubicado entre las placas conductoras, se tiene

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

donde \vec{E}_1 es el campo producido por la placa del lado izquierdo en el punto considerado, en donde se asume ubicada una carga de prueba que es positiva por definición). Luego teniendo presente la **ley de polaridad**, se tiene

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\hat{i})$$

Por otro lado, si \vec{E}_2 es el campo producido por la placa del lado derecho en el punto considerado, de igual forma al caso anterior se encuentra

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(-\hat{i})$$

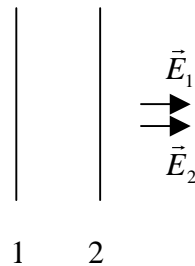
Sustituyendo en $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ los valores de los campos respectivos se obtiene

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\hat{i}) + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(-\hat{i}) = 0$$

b) De igual forma que para el caso anterior, para un punto fuera de las láminas se tiene

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Supongamos que el punto donde estamos determinado el campo está fuera (lado derecho, ver figura)



Donde:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\hat{i}) \text{ y } \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\hat{i}) \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2$$

Entonces

$$\vec{E} = 2\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(\hat{i}) \quad (\text{lado exterior derecho})$$

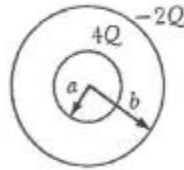
$$\vec{E} = 2\vec{E}_1 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}(\hat{i}) \quad (\text{lado exterior izquierdo})$$

De donde se obtiene que la magnitud del campo para cualquier punto (cercano) fuera de las placas es

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Problema 2.13

Dos cascarones esféricos de radios a y b concéntricos tienen cargas $4Q$ y $-2Q$ respectivamente. Encuentre el campo eléctrico para a) $r < a$, b) $a < r < b$, c) $r > b$ (ver figura).



Solución:

En todos los casos considerados, los cascarones se comportan como cargas puntuales, luego el campo eléctrico después de aplicar la Ley de Gauss se puede expresar en la forma:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{Encerrada}}{r^2}$$

Luego

$$a) \quad E(r < a) = 0 \quad (q_{Encerrada} = 0)$$

$$b) \quad E(a < r < b) = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (q_{Encerrada} = 4Q)$$

$$c) \quad E(r > b) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (q_{Encerrada} = 4Q - 2Q = 2Q)$$

Problema 2.14

Dos **placas metálicas paralelas de dimensiones grandes comparadas con su separación** que es de 0.01 m, tienen una densidad de carga uniforme $\sigma = 10^{-5} \text{ C/m}^2$. Calcule la fuerza por unidad de área que ejerce una placa sobre la otra.

Solución:

De la Ley de Coulomb, la fuerza ejercida sobre una carga (placa cargada) está dada por:

$$F = q_{placa} E$$

En este caso $q_{placa} = \sigma A$ y el campo obtenido a partir de la Ley de Gauss es $E = \sigma / \epsilon_0$ (ver problema 2.5), entonces

$$F = \sigma A \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

de donde se encuentra

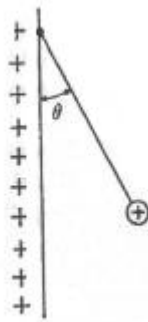
$$\frac{F}{A} = \frac{\sigma^2}{\epsilon_0}$$

Reemplazando los valores respectivos, se obtiene

$$\frac{F}{A} = 11.3 \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

Problema 2.15

Una esfera de 10 g de masa y con una carga de 10^{-6} C, se encuentra suspendida de un hilo que forma un ángulo de 30° con **una superficie conductora muy grande** que tiene una distribución de carga σ constante y de la cual pende la esfera (ver figura). Encuentre el valor de σ .

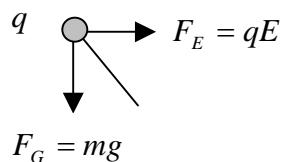


Solución:

A partir de la aplicación de la Ley de Gauss para una superficie conductora muy grande (ver problema 2.5), se encuentra que el campo eléctrico en sus vecindades está dado por:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Del DCL en la carga positiva:



Se tiene

$$F_E = F_G \tan \theta$$

Sustituyendo los valores de las fuerzas

$$qE = mg \tan \theta$$

reemplazando el valor del campo se tiene

$$q \frac{\sigma}{\epsilon_0} = mg \tan \theta$$

de donde se encuentra

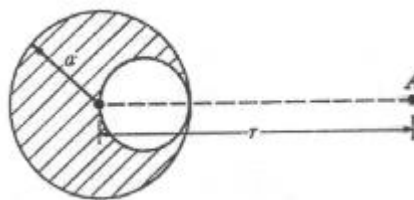
$$\sigma = \frac{\epsilon_0}{q} mg \tan \theta$$

Sustituyendo los valores respectivos, se obtiene

$$\sigma = 5.0 \times 10^{-7} [C / m^2]$$

Problema 2.16

Una **esfera no conductora** de radio a con una densidad de carga uniforme ρ tiene una **cavidad** esférica como se muestra en la siguiente figura, calcule el campo eléctrico en el punto A.



Solución:

Utilizando el principio de superposición, se tiene que

$$E_A = E_{Esfera} + E_{Cavidad}$$

Aplicando la ley de Gauss

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{enc.}}{\epsilon_0}$$

para la esfera no conductora, como $\vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{s}$ se tiene

$$\oiint E ds = \frac{q_{Esfera}}{\epsilon_0}$$

dado que $E = |\vec{E}| = Cte$ sobre todos los puntos de la superficie Gaussiana, entonces

$$E \oiint ds \equiv E 4\pi r^2 = \frac{q_{Esfera}}{\epsilon_0}$$

de donde:

$$E_{Esfera} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{Esfera}}{r^2}$$

$$q_{Esfera} = \rho V_{Esfera} = \rho 4\pi a^3 / 3$$

$$q_{Cavidad} = -\rho V_{Cavidad} = -\rho 4\pi (a/2)^3 / 3$$

Entonces:

$$E_{Esfera} = \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{\rho a^3}{r^2}$$

Trabajando en forma análoga, para la cavidad se obtiene

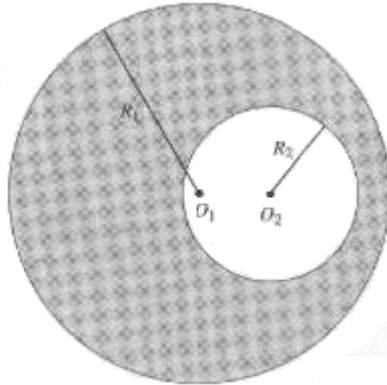
$$E_{Cavidad} = -\frac{1}{24\epsilon_0} \frac{\rho a^3}{(r - a/2)^2}$$

Sustituyendo ambos campos (esfera y cavidad) en E_A , se encuentra

$$E_A = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{8(r - a/2)^2} \right)$$

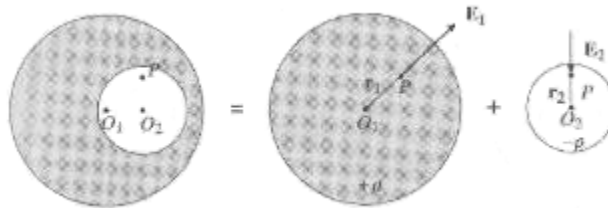
Problema 2.17

Una esfera de radio R_1 , que está cargada con densidad de carga uniforme ρ , tiene una cavidad esférica de radio R_2 no concéntrica con la esfera. Calcular el campo eléctrico en el interior de la cavidad.



Solución:

Se aplica el principio de superposición. La esfera con la cavidad se puede considerar como la superposición de una esfera de radio R_1 , uniformemente cargada con densidad cúbica de carga $+\rho$ y otra esfera de radio R_2 , uniformemente cargada con densidad cúbica de carga $-\rho$. El campo eléctrico en un punto cualquiera del interior de la cavidad será la suma de los campos creados por las dos esferas en dicho punto.



El campo eléctrico en un punto interior de una esfera cargada uniformemente con densidad de carga ρ se calcula aplicando el teorema de Gauss a una superficie esférica de radio $r < R$, concéntrica con la esfera cargada. Debido a la simetría el campo es radial y tiene el mismo módulo en todos los puntos de la superficie gaussiana

$$E 4\pi r^2 = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\epsilon_0},$$

de donde se obtiene el campo eléctrico

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

Superponiendo los campos de las dos esferas, cargadas con cargas $+\rho$ y $-\rho$, en el punto P que dista r_1 y r_2 , de los centros O_1 y O_2 de las esferas, se obtiene el campo en el punto P de la cavidad

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_1 - \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (r_1 - r_2)$$

siendo $r_1 - r_2 = \overline{O_1O_2}$, resulta

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overline{O_1O_2}$$

El campo eléctrico en el interior de la cavidad es uniforme y tiene la dirección de la recta que une los centros de las esferas.

$$E(2\pi rh) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \pi R^2 h$$

luego

$$E(r > R) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

CAPÍTULO III

EL POTENCIAL ELÉCTRICO

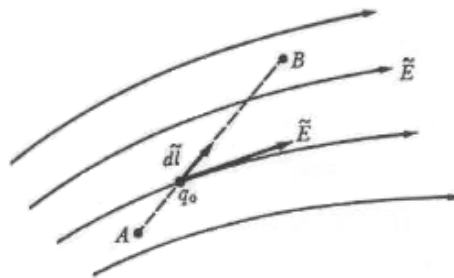
3.1. Definición de diferencia de potencial

El trabajo que se realiza al llevar la carga prueba positiva q_0 del punto A al punto B , lo representamos por W_{AB} . La diferencia de potencial entre A y B , está definida por la ecuación:

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0} \quad (3.1)$$

La diferencia de potencial entre dos puntos es igual al trabajo realizado al llevar la carga prueba entre dichos puntos por un agente externo, dividida por la magnitud de la carga prueba.

Suponiendo que el potencial en el punto B es mayor que en A ; al llevar una carga positiva, al punto B , tendrá un potencial mayor que en A .



La unidad de potencial eléctrico es $Volt \equiv Joule / Coulomb$ también se puede escribir que $1[V] = 1[J/C]$

Generalmente cuando se habla de potencial eléctrico se refiere a diferencias de potencial. Para problemas donde se desea calcular el potencial eléctrico de cargas aisladas o de una distribución eléctrica, ordinariamente **se toma como potencial de referencia el de un punto situado en el infinito, donde el valor del potencial es cero**. Para algunos circuitos eléctricos se toma como referencia de potencial a la tierra y se le da el valor de cero, esto se verá más detalladamente en el capítulo siguiente.

3.2. Cálculo del potencial eléctrico a partir del campo eléctrico

El trabajo que se efectúa para llevar una carga prueba del punto A al punto B en la figura anterior, está dado por:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Al moverse la carga lentamente del punto A al punto B , se tiene que el campo ejerce una fuerza $q_o E$ sobre la carga prueba. Para evitar que la carga prueba se acelere, hay que aplicar una fuerza exactamente igual a $-q_o E$, con lo anterior se puede escribir

$$W_{AB} = -q_o \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

La integral sobre la trayectoria de A a B , también se conoce como integral de línea. Sustituyendo la expresión anterior en la Ec. 3.1, se tiene

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_o} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.2)$$

Si se considera el punto A en el infinito, cuyo potencial es cero, se obtiene el valor del potencial V en el punto B , dado por:

$$V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.3)$$

La expresión anterior permite determinar el potencial a partir del campo eléctrico.

3.3. Potencial de una carga puntual

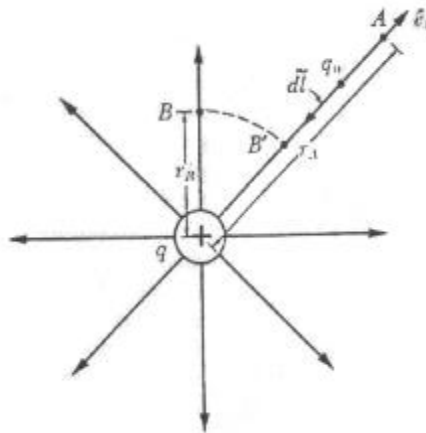
La diferencia de potencial entre los puntos A y B , que se encuentran separados de la carga a distancias r_A y r_B , respectivamente, se puede encontrar calculando primero el campo eléctrico en la vecindad de la carga puntual, el cual está dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{e}_r$$

Sustituyendo en la ecuación para el potencial, se obtiene

$$V_B - V_A = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{\hat{e}_r \cdot d\vec{l}}{r^2}$$

De la siguiente figura se aprecia que $d\vec{l}$ está en dirección opuesta a \hat{e}_r .



Además $dl = -dr$, luego

$$V_B - V_A = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2}$$

de donde se encuentra:

$$V_B - V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (3.4)$$

De esta ecuación vemos que cuando $r_A \rightarrow \infty$, $V_A \rightarrow 0$; entonces el potencial V en el punto B está dado por:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.5)$$

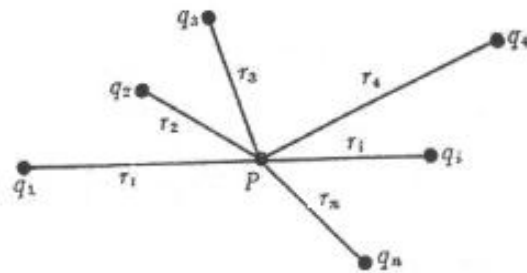
3.4. Potencial debido a una distribución de carga

Para calcular el potencial de una distribución de carga, vamos a considerar que está compuesta de N cargas discretas $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, entonces, el potencial en un punto P , se obtiene sumando algebraicamente los potenciales producidos por cada una de las cargas en el punto P ; usando

la Ec. (3.5) para una carga puntual, tenemos que para un conjunto de cargas discretas tal como se muestra en la siguiente figura, el potencial está expresado por:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \quad (3.6)$$

donde V_i es el potencial debido a la carga q_i que se encuentra a una distancia r_i del punto P . Esta suma es algebraica y de aquí su facilidad para encontrar el campo eléctrico usando el potencial como veremos en la siguiente sección.



Distribución de cargas puntuales en el espacio

Cuando la distribución de carga es continua, se puede tomar el límite continuo de la ecuación anterior en forma siguiente:

$$\sum_{i=1}^n V_i \rightarrow \int dV \quad ; \quad \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \rightarrow \int \frac{dq}{r} \quad (3.7)$$

Obteniéndose para el potencial debido a la distribución continua la siguiente expresión

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (3.8)$$

donde

$$dq = \begin{cases} \lambda dl & (\text{distribución lineal}) \\ \sigma ds & (\text{distribución superficial}) \\ \rho dv & (\text{distribución volumétrica}) \end{cases}$$

3.5. Determinación del campo eléctrico a partir del potencial

A partir de la expresión $V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$, se puede escribir

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.9)$$

Si ocurre que $d\vec{l} \equiv d\vec{r}$ (coordenadas cartesianas), entonces se puede escribir

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad (3.10)$$

Luego las componentes del campo \vec{E} están dadas por:

$$E_x = -\left[\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}\right] ; E_y = -\left[\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y}\right] ; E_z = -\left[\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z}\right]$$

En forma vectorial

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}\right) V$$

También se puede escribir

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (3.11)$$

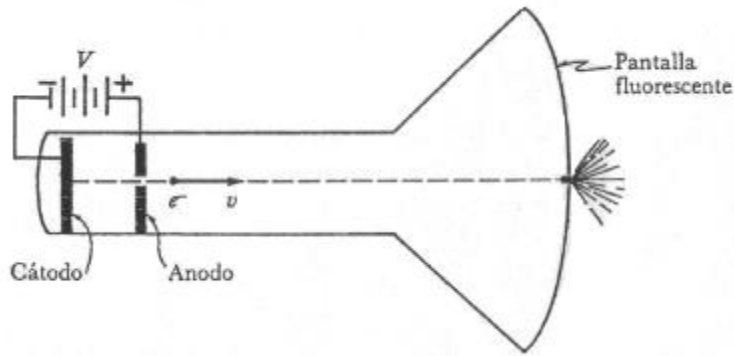
Donde $\vec{\nabla}V$ es la representación simbólica del operador gradiente. Y

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad ; \quad (\vec{\nabla} \text{ se conoce como } \mathbf{nabla}.)$$

Algunas aplicaciones:

El tubo de rayos catódicos

En un tubo de rayos catódicos simple como el mostrado en la siguiente figura, los electrones son acelerados por una diferencia de potencial entre dos placas denominadas cátodo (placa negativa) y ánodo (placa positiva). El flujo de electrones pasa a través de una abertura en el ánodo donde adquieren su mayor energía cinética para después chocar con una pantalla fluorescente.



Cuando se tiene una diferencia de potencial V entre las placas, se sabe que la energía cinética máxima $(mv^2/2)$ corresponde a la energía potencial inicial (eV) esto es

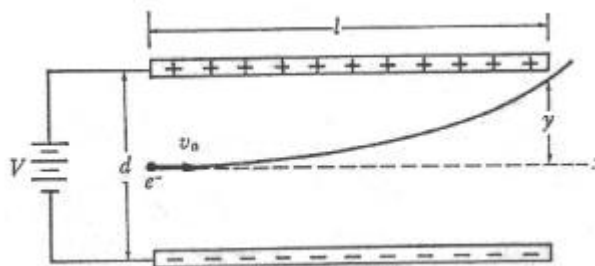
$$\frac{1}{2}mv^2 = eV$$

Luego la velocidad con la que los electrones chocan en la pantalla fluorescente, está dada por

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

Desviación de un haz de electrones por un campo eléctrico

En la siguiente figura se tienen dos placas paralelas de longitud l y separadas una distancia d , entre las cuales hay una diferencia de potencial V , que produce un campo eléctrico que es el que desvía el haz de electrones.



Para calcular la desviación “ y ” del haz de electrones cuando entra a las placas, la fuerza que ejerce el campo en el eje de las “ x ” es cero y en el eje de las “ y ” está dada por:

$$F_y = eE$$

dado que $E = V/d$ y que la fuerza se puede expresar como $F_y = m a_y$. Sustituyendo y despejando la aceleración obtenemos:

$$a_y = \frac{eV/d}{m} = \frac{eV}{md}$$

De cinemática, se tiene que:

$$y = \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$v_0 = \frac{x}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0}$$

Sustituyendo la aceleración y el tiempo

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{eV}{md} \right) \left(\frac{x}{v_0} \right)^2$$

Se encuentra

$$y = \frac{eV x^2}{2mdv_0^2} \text{ (parábola)}$$

El electrón-Volt

La cantidad de trabajo necesaria para mover la carga de un electrón ($e = 1.602 \times 10^{-19}$ [C]), a través de una diferencia de potencial de 1 [Volt], recibe el nombre de electrón-Volt.

$$1 \text{ electrón-Volt} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ [C]} \times 1 \text{ [V]}$$

$$1[eV] = 1.6 \times 10^{-19} [J] .$$

Algunos múltiplos del electrón volt son:

$$1 \text{ kiloelectrón Volt} = 1 [keV] = 10^3 [eV]$$

$$1 \text{ Megaelectrón Volt} = 1 [MeV] = 10^6 [eV]$$

$$1 \text{ Gigaelectrón Volt} = 1 [GeV] = 10^9 [eV]$$

Energía de un dipolo

Cuando un dipolo eléctrico está inmerso en un campo eléctrico, las fuerzas que experimentan las cargas son iguales en magnitud pero opuestas en dirección, por consiguiente la fuerza neta es cero, pero existe un momento sobre el dipolo que tiende a alinearlo con el campo y que está dado por:

$$\tau = 2F(a \text{ sen } \theta) \tag{3.13}$$

Dado $F = qE$ y $P = 2aq$, se tiene

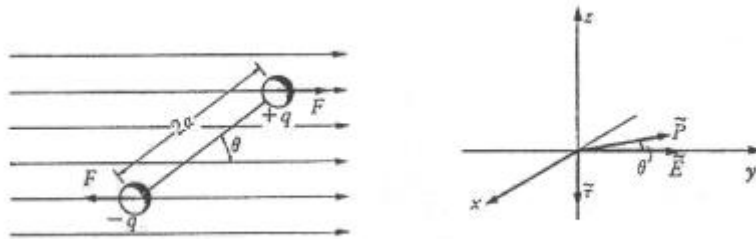
$$\tau = 2aqE \text{ sen } \theta \tag{3.14}$$

$$\tau = PE \text{ sen } \theta$$

En forma vectorial

$$\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E} \tag{3.15}$$

Suponiendo que el dipolo tiene una orientación inicial de θ_0 , con el campo y cambia su orientación a θ , el trabajo realizado está dado por:



$$U = \text{Energía Potencial} = \int dW = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau \, d\theta$$

Sustituyendo $\tau = PE \text{ sen } \theta$, obtenemos:

$$U = \int_{\theta_0}^{\theta} PE \text{ sen } \theta \, d\theta$$

Para el caso en que P y E sean constantes:

$$\begin{aligned} U &= PE \int \text{sen } \theta \, d\theta \\ &= PE[-\cos \theta]_{\theta_0}^{\theta} \end{aligned}$$

Así para $\theta_0 = \pi/2$ obtenemos:

$$U = -PE \cos \theta \tag{3.16}$$

En forma vectorial

$$U = -\vec{P} \cdot \vec{E} \tag{3.17}$$

Tarea: Explique el funcionamiento del Microondas

3.6. Problemas resueltos

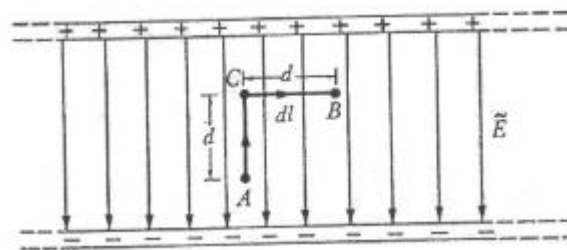
Problema 3.1

En un par de placas paralelas se tiene un campo eléctrico uniforme E , calcule la diferencia de potencial entre el punto A y el punto B al recorrer la trayectoria señalada en la figura.

Solución:

De la ecuación para el potencial

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_C^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Aquí vemos que el último sumando es cero porque la trayectoria de C a B es perpendicular al campo, entonces:

$$V_B - V_A = -\int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_0^d E \cos 180^\circ dl = E d$$

$$V_B - V_A = E d$$

Problema 3. 2

Dos gotas de agua idénticas están cargadas al mismo potencial V_1 , encuentre el nuevo potencial V_2 si las dos gotas colapsan en una sola gota.

Solución:

Sean

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} \quad (\text{potencial de cada gota por separada})$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} \quad (\text{potencial de las dos gotas juntas})$$

$$\text{Volumen}(2\text{gotas}) = 2\text{Volumen}(1\text{gota})$$

$$\frac{4}{3}\pi r_2^3 = 2\frac{4}{3}\pi r_1^3 \Rightarrow r_2 = 2^{1/3} r_1$$

Por otro lado, dado que las densidades deben ser las mismas, se puede escribir

$$\rho_2 = \rho_1 \Rightarrow \frac{q_2}{4\pi r_2^3 / 3} = \frac{q_1}{4\pi r_1^3 / 3}$$

de donde se encuentra

$$q_2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 q_1$$

Sustituyendo q_2 en $V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2}$,

se obtiene

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

Reemplazando $r_2 = 2^{1/3} r_1$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} 2^{2/3} \equiv 2^{2/3} V_1$$

Problema 3.3

Una **esfera metálica maciza** de radio a , tiene una carga total Q .

- a) Calcule el campo eléctrico. Para $r < a$ y $r > a$.
- b) El potencial eléctrico para puntos dentro y fuera de la esfera.
- c) Haga una gráfica cualitativa del campo eléctrico versus el radio, y otra del potencial versus el radio.

Solución:

- a) Para $r < a$:

Por la Ley de Gauss vemos que $E = 0$ (no hay carga encerrada). Para $r > a$:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{e}_r$$

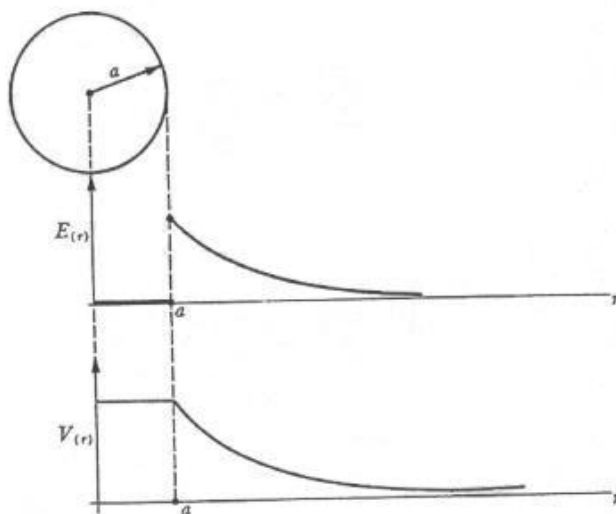
- b) Para $r < a$: (ver problema 3.15)

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Para $r > a$: (ver problema 3.15)

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

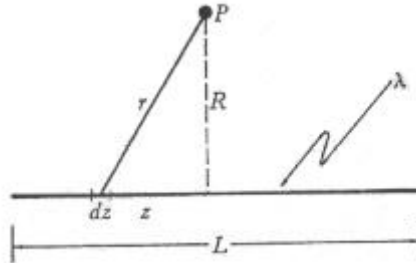
- c)



Problema 3.4

Línea de carga finita

Se tiene una línea de carga de longitud L con una distribución de carga λ uniforme. Calcular el potencial eléctrico V a una distancia R de la línea sobre la perpendicular bisectriz.



Solución:

Sustituyendo en la Ec. (3.8) $dq = \lambda dz$ y $r = (R^2 + z^2)^{1/2}$ obtenemos:

$$V = \int \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\lambda dz}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

integrando

$$V = \frac{2\lambda}{4\pi \epsilon_0} \int_0^{L/2} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{2\lambda}{4\pi \epsilon_0} \left[\text{Ln} (z + \sqrt{R^2 + z^2}) \right]_0^{L/2}$$

y evaluando

$$V = \frac{2\lambda}{4\pi \epsilon_0} \text{Ln} \left[\frac{L/2 + \sqrt{L^2/4 + R^2}}{R} \right]$$

Problema 3.5

Utilizando el resultado del problema anterior (con $R = r$), calcule el campo eléctrico en el mismo punto p a una distancia r de la línea de carga.

Solución:

Tenemos que:

$$V = \frac{2\lambda}{4\pi \epsilon_0} \text{Ln} \left(\frac{L/2 + \sqrt{L^2/4 + r^2}}{r} \right)$$

y de acuerdo con la ecuación

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

donde $\vec{\nabla}V$ en coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) es:

$$\vec{\nabla}V = \left(\frac{\partial}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{\partial}{rd\phi} \hat{e}_\phi + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z \right) V$$

Se puede ver que en esta ecuación que los últimos dos términos valen cero ya que no existe variación del potencial con respecto a ϕ ni con respecto a z ; entonces:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{e}_r$$

resultando:

$$\vec{E} = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{r}{(L/2 + \sqrt{L^2/4 + r^2})\sqrt{L^2/4 + r^2}} + \frac{1}{r} \right) \hat{e}_r$$

Para una línea de carga infinita, $L \rightarrow \infty$ obtenemos de la expresión anterior:

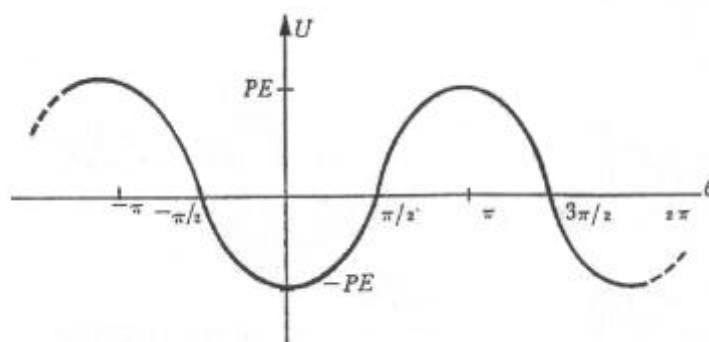
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{e}_r$$

Problema 3.6

- Grafique la energía almacenada de un dipolo como función del ángulo.
- Calcule cuál es la máxima energía almacenada.

Solución:

- Esta gráfica es la de la Ec. (3.16), que es la siguiente:



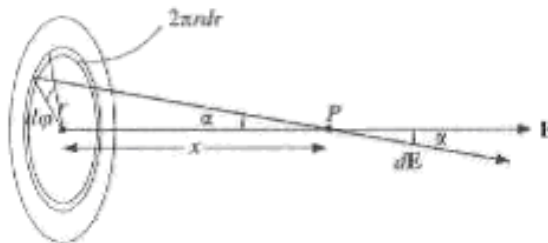
b) De la misma ecuación (3.16), se aprecia que la energía almacenada es máxima cuando $\cos\theta = -1$ entonces:

$$U_{m\acute{a}x} = PE$$

Se observa que este resultado está de acuerdo con la gráfica anterior.

Problema 3.7

Un disco de plástico de radio R tiene una carga Q repartida uniformemente en su superficie con densidad superficial de carga σ . Calcule el potencial y el campo eléctrico en un punto del eje del disco que dista x de su centro.



Solución:

Se divide el disco en elementos de área $2\pi r dr$ que se puede considerar como anillos elementales de radio r , cuya carga por unidad de longitud es $\lambda = \sigma dr$. Se empieza calculando el campo creado por un anillo. Un elemento de anillo de longitud $rd\phi$ crea un campo elemental

$$dE^* = \frac{\lambda rd\phi}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + x^2)}$$

Integrando para todo el anillo elemental de radio r , y teniendo en cuenta que la suma de las componentes del campo en la dirección perpendicular al eje x se anula, el campo E^* tiene la dirección del eje x :

$$\begin{aligned} E^* &= \int dE^* \cos\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda rd\phi}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + x^2)} \frac{x}{(r^2 + x^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\lambda r}{2\epsilon_0} \frac{x}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $\lambda = \sigma dr$, E^* es el campo creado por un elemento de disco y, por tanto, un campo elemental dE . El campo creado por todo el disco es

$$E = \int dE = \int_0^R \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0} \frac{x}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right)_0^R = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}} + \frac{1}{|x|} \right)$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)$$

donde se ha considerado positiva la raíz cuadrada del denominador para $r = 0$, es decir

$$\frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{|x|},$$

lo que está de acuerdo para $x > 0$. Si se pasa al límite para $x \rightarrow 0$, a la derecha y a la izquierda del disco, se obtiene el campo eléctrico de un plano indefinido ($x \ll R$) con carga superficial σ .

$$\lim_{(x \rightarrow 0^+)} E(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} u_x \qquad \lim_{(x \rightarrow 0^-)} E(x) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} u_x$$

Este resultado significa que, al atravesar un plano cargado, el campo eléctrico sufre una discontinuidad ΔE .

$$\Delta E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} u_x - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} u_x \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} u_x$$

Para calcular el potencial en un punto P del eje que dista x del centro se divide la superficie del disco en anillos elementales de carga $dq = \lambda r d\phi = \sigma dr r d\phi$ que distan $(r^2 + x^2)^{1/2}$ del punto P . El potencial creado en el punto P por la carga de un anillo elemental es

$$dV = \frac{\sigma r d\phi dr}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + x^2)^{1/2}}$$

El potencial debido a todo el disco cargado será

$$V(x) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (r^2 + x^2)^{-1/2} r dr =$$

y siendo $Q = \sigma \pi R^2$

$$V(x) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(\sqrt{R^2 + x^2} - |x| \right)$$

El potencial es máximo para $x = 0$,

$$V(0) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Si $x > 0$, el potencial se puede expresar

$$V(x) = \frac{Qx}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[\left(1 + \frac{R}{x^2} \right)^{1/2} - 1 \right]$$

Para puntos alejados

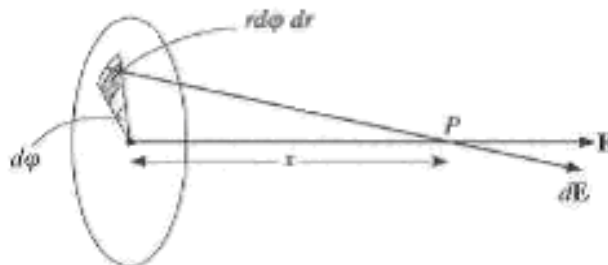
$$\frac{R^2}{x^2} \ll 1 \Rightarrow \left(1 + \frac{R^2}{x^2} \right)^{1/2} \approx 1 + \frac{R^2}{2x^2}$$

se tiene el potencial de Coulomb (carga puntual)

$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x}$$

Problema 3.8

Un disco de material aislante de radio R tiene una carga Q repartida en su superficie, de modo que la densidad superficial de carga, σ , varía proporcionalmente con la distancia r al centro del disco. Calcule el potencial y el campo eléctrico en un punto del eje del disco que dista x de su centro.



Solución:

Tomando $\sigma = kr$, la carga Q del disco es

$$Q = \iint \sigma \, ds = \int_0^R \int_0^{2\pi} kr \, r \, d\varphi \, dr = \frac{2\pi k R^3}{3}$$

de donde

$$k = \frac{3Q}{2\pi R^3}$$

Para calcular el potencial en un punto P del eje que dista x del centro se divide la superficie del disco en elementos de superficie de área $ds = r \, d\varphi \, dr$ en coordenadas polares y que distan $(r^2 + x^2)^{1/2}$ del punto P . El potencial creado en el punto P por la carga de un elemento del disco es

$$dV = \frac{kr \, r \, d\varphi \, dr}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + x^2)^{1/2}}$$

El potencial debido a todo el disco cargado será

$$V = \frac{k}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (r^2 + x^2)^{-1/2} r^2 \, dr$$

resolviendo la integral y sustituyendo el valor de k , se obtiene

$$V = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[\frac{R(R^2 + x^2)^{1/2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{R + (R^2 + x^2)^{1/2}}{x} \right) \right]$$

Para calcular el campo eléctrico se procede de modo análogo, teniendo en cuenta que, debido a la simetría del problema, las componentes del campo perpendiculares al eje del disco se anulan. El campo en el punto P sólo tiene componente en la dirección del eje, y su valor se obtiene integrando las componentes en la dirección del eje de los campos generados por cada elemento de área

$$dE = \frac{kr \, r \, d\varphi \, dr}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + x^2)}$$

$$E = \iint dE \cos \alpha = \iint \frac{kr \, r \, d\varphi \, dr}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + x^2)} \frac{x}{(r^2 + x^2)^{1/2}}$$

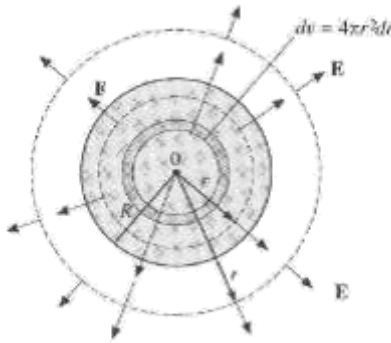
Integrando para todo el disco, es decir, entre 0 y 2π para φ y entre 0 y R para r , se tiene

$$V = \frac{3Qx}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[\ln \left(\frac{R + (R^2 + x^2)^{1/2}}{x} \right) - \frac{R}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right]$$

Problema 3.9

Una carga q está distribuida en el volumen de una esfera de radio R con una densidad cúbica de carga no uniforme $\rho = A(R - r)$, siendo r la distancia al centro de la esfera y A una constante. Calcule:

- a) El valor de la constante A en función de q y de R .
- b) El campo eléctrico y el potencial de la esfera en puntos interiores y exteriores.
- c) Los valores del potencial en el centro y en la superficie de la esfera.



Solución:

- a) La carga total de la distribución es

$$q = \int_v \rho \, dv = \int_0^R A(R - r) 4\pi r^2 \, dr = \frac{\pi AR^4}{3},$$

de donde

$$A = \frac{3q}{\pi R^4}$$

- b) Los campos tienen simetría esférica y sus direcciones son radiales. Aplicando el teorema de Gauss a una superficie esférica de radio $r < R$, se tiene

$$\iint E_i \, ds = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho \, dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r A(R - r) 4\pi r^2 \, dr$$

como el módulo de E tiene el mismo valor en todos los puntos de la superficie gaussiana se verifica

$$\iint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \iint E_i ds = E_i \iint ds = E_i 4\pi r^2,$$

por tanto

$$E_i 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \left(A 4\pi R \frac{r^3}{3} - A 4\pi R \frac{r^4}{4} \right)$$

$$E_i = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R^4} (4Rr - 3r^2)$$

El campo en un punto exterior se obtiene aplicando el teorema de Gauss a una superficie esférica de radio $r > R$,

$$\iint E_e ds = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} q \quad E_e = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

El potencial se calcula a partir de la circulación del campo

(para $r < R$)

$$V_r - V_R = -\int_R^r E_i \cdot dr = -\int_R^r \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R^4} (4Rr - 3r^2) dr$$

$$V_r = V_R + \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{2r^2}{R^3} + \frac{r^3}{R^4} \right)$$

(para $r > R$)

$$V_r - V_\infty = -\int_\infty^r E_e \cdot dr = -\int_\infty^r \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r}$$

Para $r = R$

$$V_R = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R}$$

De donde

$$V_{r < R} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{2}{R} - \frac{2r^2}{R^3} + \frac{r^3}{R^4} \right) \quad (1)$$

$$V_{r > R} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R} \quad (2)$$

- c) El potencial en el centro de la esfera se obtiene sustituyendo en la expresión (1) el valor de $r = 0$.

$$V_0 = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 R}$$

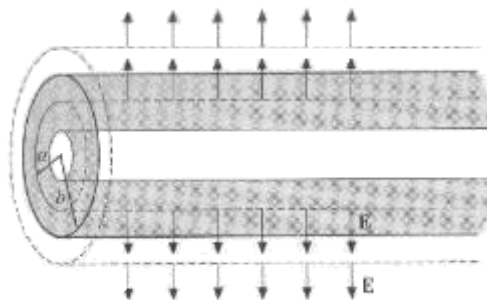
El potencial en la superficie de la esfera, ya calculado, se obtiene sustituyendo en cualquiera de las expresiones (1) ó (2)

$$V_r = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R}$$

Problema 3.10

El espacio comprendido entre dos cilindros coaxiales indefinidos de radios a y b ($a < b$) está cargado eléctricamente con una densidad cúbica de carga no uniforme, $\rho = Ar^2$, siendo r la distancia al eje de los cilindros y A una constante. Calcúlese:

- El campo eléctrico en las distintas regiones del espacio.
- La diferencia de potencial entre los puntos $r = R_1$, y $r = R_2$, siendo $a < R_1 < b$ y $R_2 > b$.



Solución:

- a) En la región $r < a$ $E = 0$

En la región $a < r < b$ el campo eléctrico tiene simetría cilíndrica y su dirección es la radial de las coordenadas cilíndricas. Aplicando el teorema de Gauss a una superficie cilíndrica de radio r y altura h , y teniendo en cuenta que el flujo del campo eléctrico a través de las bases es cero, se tiene

$$E_1 2\pi r h = \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^r 2\pi r h A r^2 dr,$$

de donde se obtiene

$$E_1 = \frac{A}{4\epsilon_0} \left(\frac{r^4 - a^4}{r} \right)$$

Del mismo modo, para $r > b$

$$E_2 \cdot 2\pi r h = \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^b 2\pi r h A r^2 dr$$

obteniéndose

$$E_2 = \frac{A}{4\epsilon_0} \left(\frac{b^4 - a^4}{r} \right)$$

b) Se calcula $V_{R_1} - V_{R_2}$, a partir de la circulación del campo eléctrico

$$V_{R_1} - V_{R_2} = -\int_{R_2}^b E_2 dr - \int_b^{R_1} E_1 dr$$

$$V_{R_1} - V_{R_2} = -\frac{A}{4\epsilon_0} \int_{R_2}^b \left(\frac{b^4 - a^4}{r} \right) dr - \frac{A}{4\epsilon_0} \int_b^{R_1} \left(\frac{r^4 - a^4}{r} \right) dr$$

$$V_{R_1} - V_{R_2} = -\frac{A}{4\epsilon_0} \left(\frac{b^4 - R_1^4}{4} + a^4 \ln \frac{R_1}{R_2} + b^4 \ln \frac{R_2}{b} \right)$$

Problema 3.11

Una esfera conductora (1) de radio R_1 se carga a un potencial V y después se aísla. A continuación la esfera (1) se rodea por otra esfera conductora hueca (2), concéntrica con ella, de radios R_2 y R_3 ($R_2 < R_3$), y se desea calcular los potenciales de las esferas en las situaciones sucesivas siguientes:

- La esfera (2) está aislada y descargada.
- La esfera (2) se une a tierra.
- La esfera (2) se desconecta de tierra y después la esfera (1) se conecta a tierra.



Solución:

Inicialmente la esfera (1) se conecta al potencial V adquiriendo una carga $q_1 = 4\pi \epsilon_0 R_1 V$. A continuación se aísla, manteniendo su carga constante.

- a) La esfera (1) tiene una carga $q_1 = 4\pi \epsilon_0 R_1 V$ y la esfera (2) por inducción adquiere una carga $-q_1$ en la superficie interior y $+q_1$ en la superficie exterior. Aplicando el principio de superposición, se tienen los potenciales de las dos esferas

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_1} - \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_2} + \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_3} = V \left(1 - \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3} \right)$$

$$V_2 = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_3} - \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_3} + \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_3} = V \frac{R_1}{R_3}$$

- b) Al conectar a tierra la esfera (2), su potencial es $V_2 = 0$ y la carga de la esfera (2) es $q_2 = -q_1$, colocada en la superficie interior. Como sólo hay campo en el espacio entre las dos esferas, el potencial de la esfera (1) es

$$\begin{aligned} V_1 &= -\int_{R_2}^{R_1} E \cdot dr = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_3} dr = \\ &= \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = V \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

- c) Al desconectar de tierra la esfera (2) se mantiene su carga $q_2 = -q_1$. Al conectar a tierra la esfera (1), su potencial es $V_1 = 0$ y su carga cambiará a q'_1 , para que sea cero. Los valores de los campos son

$$(R_1 < r < R_2) \quad E'_1 = \frac{q'_1}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

$$(r > R_3) \quad E'_2 = \frac{q'_1 - q_1}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

y los potenciales se calculan a partir de la circulación de los campos

$$V'_2 = -\int_{\infty}^{R_3} E'_2 dr = \frac{q'_1 - q_1}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

$$V_1' - V_2' = -V_2' = \int_{R_2}^{R_1} \frac{q_1'}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_1'}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

De estas dos ecuaciones se obtienen la carga de la esfera (1), q_1' y el potencial de la esfera (2), V_2' :

$$q_1' = \frac{q_1}{R_2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)} = \frac{4\pi \epsilon_0 R_1 V}{R_2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)}$$

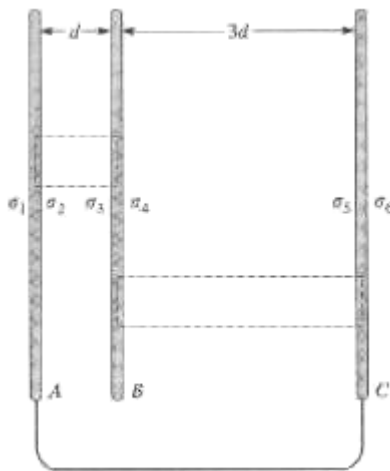
$$V_2' = V \frac{R_1(R_1 - R_2)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_1 R_3}$$

Problema 3.12

Tres láminas metálicas paralelas de área S están dispuestas como se indica en la figura: la lámina central, aislada, tiene una carga Q y las otras están unidas eléctricamente y separadas de la lámina central distancias d y $3d$, respectivamente. Si a la lámina izquierda se le da una carga igual a $-3Q$, determinar:

- a) Las distribuciones de carga en las superficies de las tres láminas.
- b) La fuerza que actúa sobre la lámina central.

Se desprecian efectos de bordes ($d \ll \sqrt{S}$).



Solución:

a) Como las láminas A y C están unidas eléctricamente, la carga de la lámina A se reparte entre las caras de ambas láminas. Denominando las densidades de carga de las tres láminas con los subíndices que se indican en la figura y teniendo en cuenta la conservación de la carga eléctrica, se obtiene:

Láminas A y C:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_5 + \sigma_6 = -\frac{3Q}{S} \quad (1)$$

Lámina B:

$$\sigma_3 + \sigma_4 = \frac{Q}{S} \quad (2)$$

Aplicando el teorema de Gauss a las superficies punteadas indicadas en la figura, como el campo en el interior de los conductores es cero, también es cero la carga encerrada por la gaussiana (elementos correspondientes)

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (3)$$

$$\sigma_4 + \sigma_5 = 0 \quad (4)$$

Las placas A y C están al mismo potencial $V_A - V_C = 0$, es decir, la circulación del campo entre ellas es igual a cero:

$$\frac{\sigma_2}{\epsilon_0} d + \frac{\sigma_4}{\epsilon_0} 3d = 0$$

Por tanto

$$\sigma_2 + 3\sigma_4 = 0$$

Por último, utilizando argumentos de simetría

$$\sigma_1 = \sigma_6$$

Resolviendo el sistema de las seis ecuaciones se obtienen los valores

$$\sigma_1 = \sigma_6 = -\frac{Q}{S} \quad \sigma_2 = -\frac{3Q}{4S} \quad \sigma_3 = \frac{3Q}{4S}$$

$$\sigma_4 = \frac{Q}{4S} \quad \sigma_5 = -\frac{Q}{4S}$$

b) El módulo de la fuerza por unidad de área (o presión electrostática) sobre la lámina central es

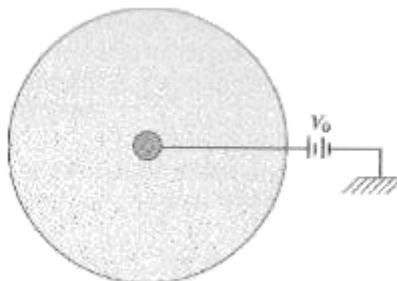
$$\frac{dF}{dS} = \frac{\sigma_4^2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_3^2}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2}{32\epsilon_0 S} - \frac{9Q^2}{32\epsilon_0 S} = -\frac{Q^2}{4\epsilon_0 S}$$

su dirección es normal a la placa y el signo negativo indica que está dirigida hacia la izquierda. La fuerza total sobre la lámina central es

$$F = -\frac{Q^2}{4\epsilon_0 S}$$

Problema 3.13

Una esfera conductora de radio R está conectada a una fuente de potencial V_0 . Si la esfera se rodea de una capa esférica dieléctrica, concéntrica con la esfera, de radios interior y exterior R y $9R$, respectivamente, ¿qué permitividad relativa ϵ_r deberá tener el dieléctrico para que el campo eléctrico en la zona vacía ($r > 9R$) sea 1,5 veces mayor que el que había antes de colocar el dieléctrico?



Solución:

Antes de poner el dieléctrico, la carga de la esfera es

$$V_0 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad Q_0 = 4\pi\epsilon_0 R V_0$$

Después de poner el dieléctrico la carga libre de la esfera es Q , que se obtiene de la condición de que el potencial de la esfera se mantiene igual a V_0 .

$$V_0 = -\int_{\infty}^{9R} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr - \int_{9R}^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2} dr$$

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 9R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{9R} \right)$$

De donde se encuentra que

$$Q = \frac{36\pi\epsilon_0\epsilon_r RV_0}{\epsilon_r + 8}$$

Como el campo en la zona vacía debe ser 1,5 veces mayor después de poner el dieléctrico, para $r > 9R$ se verifica

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 1,5 \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

es decir

$$Q = 1,5 Q_0$$

$$\frac{36\pi\epsilon_0\epsilon_r RV_0}{\epsilon_r + 8} = 1,5 (4\pi\epsilon_0 RV_0)$$

de donde se despeja el valor de la permitividad relativa del dieléctrico, obteniéndose

$$\epsilon_r = 1,6$$

Problema 3.14

Considere una **esfera sólida aislante de radio R** cargada en forma uniforme con una carga Q. Determine el potencial eléctrico en las regiones que se indican:

- a) $r > R$ y b) $r < R$

Solución:

- a) El potencial en este caso está dado por

$$V(r > R) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^r E(r > R) dr$$

Sustituyendo el valor del campo fuera por: $E(r > R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$

Se obtiene

$$V(r > R) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2}$$

Integrando se encuentra

$$V(r > R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

b) El potencial está dado por $V(r < r) = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^R E(r > R) dr - \int_R^r E(r < R) dr$

Sabiendo que , $E(r > R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$, y que $E(r < R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r$, se obtiene

$$V(r < R) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{dr}{r^2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_R^r r dr$$

$$V(r < R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{1}{2} (r^2 - R^2)$$

Ordenando términos se encuentra

$$V(r < R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2R} \right) \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Problema 3.15

Considere una **esfera conductora** aislada de radio R con carga total Q. Determine el potencial eléctrico en las regiones que se indican:

a) $r > R$ y b) $r \leq R$

Solución:

a) El potencial al igual que en problema anterior está dado por

$$V(r > R) = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^r E(r > R) dr$$

Sustituyendo el valor del campo $E(r > R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ y luego integrando se encuentra

$$V(r > R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

b) El potencial está dado por

$$V(r \leq R) = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^R E(r > R) dr - \int_R^r E(r < R) dr$$

Sabiendo que , $E(r > R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$, y que $E(r < R) = 0$, se obtiene

$$V(r \leq R) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{dr}{r^2}$$

Luego

$$V(r \leq R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

CAPÍTULO IV

CORRIENTE ELECTRICA Y CIRCUITOS

4.1. Corriente eléctrica

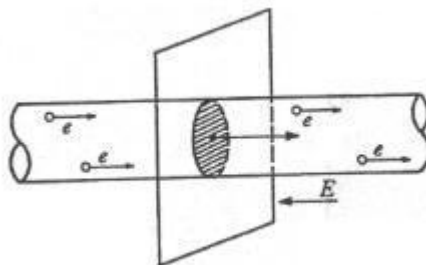
En los conductores los electrones libres se encuentran moviéndose al azar es decir, que si pasamos un plano a través del conductor el número de electrones que cruzan de izquierda a derecha este plano, es igual al número de electrones que lo cruzan de derecha a izquierda.

Supongamos que se tiene como conductor a un alambre metálico y le aplica una diferencia de potencial en sus extremos, por lo tanto se tendrá un campo eléctrico uniforme dentro del alambre y todos los electrones que se movían al azar, se mueven ahora en la dirección contraria a la del campo. Si cruza el alambre conductor por un plano como se muestra en la figura se ve que un número de electrones pasan por la sección transversal (área rayada) por unidad de tiempo establecen una corriente de electrones en el conductor, la que se denomina corriente eléctrica y se representa por la letra I (que se asume constante), y está definida como:

$$I = \frac{q}{t} \tag{4.1}$$

La unidad de corriente eléctrica I es el **Ampere** siempre que la unidad de carga sea el Coulomb y la unidad de tiempo sea el segundo.

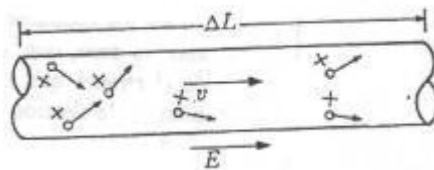
$$I = 1 \left[\frac{C}{s} \right] \equiv 1[A]$$



En este capítulo sólo se van a considerar sólo corrientes constantes. Para los casos en donde la corriente eléctrica varía con el tiempo, ésta se expresa en la forma siguiente:

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (4.2)$$

Se va a convenir en que la dirección de la corriente va a ser la dirección de la carga eléctrica positiva (o portadores de carga positivos). Cuando un conductor está sujeto a un campo eléctrico externo, los portadores de carga se mueven lentamente en la dirección del campo con una velocidad que se conoce como **velocidad de desplazamiento o de arrastre**.



Un campo eléctrico externo en un alambre conductor.

Para encontrar una relación entre la corriente de un conductor y su carga, consideramos un conductor cilíndrico como el de la anterior, en donde vamos a suponer que la velocidad de desplazamiento es v y por consiguiente en un Δt de tiempo, los portadores de carga se desplazan un ΔL , entonces, el número de portadores de carga, en este caso electrones conductores, es $nA\Delta L$ donde n es el número de electrones por unidad de volumen y A la sección transversal, por lo tanto, $A\Delta L$ es el volumen. La cantidad de carga en $A\Delta L$ es:

$$\Delta q = (nA\Delta L)e$$

donde e es la carga de cada electrón conductor. Para un Δt se tiene que la corriente:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{nA\Delta L}{\Delta t} e$$

la velocidad de desplazamiento de los electrones dentro del conductor es $\Delta L/\Delta t$; por consiguiente.

$$I = n A v e$$

Ahora se introducirá un nuevo término que se va a definir como densidad de corriente eléctrica que se simboliza por J , y que corresponde a la corriente por unidad de área.

$$J = \frac{I}{A} = n v e \quad (4.3)$$

la densidad de corriente es un vector y está orientado en la dirección del movimiento de los portadores de carga positivos o sea la dirección de la velocidad de desplazamiento.

Como es común que la densidad de corriente varíe en función del radio y la corriente depende de la sección transversal, entonces para estos casos la corriente está dada por:

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (4.4)$$

4.2. Ley de Ohm

Si se tienen diferentes materiales en forma de conductores cilíndricos idénticos y se les aplica la misma diferencia de potencial en sus extremos se puede observar experimentalmente que sus corrientes eléctricas son diferentes. Si se supone que el campo eléctrico dentro de cada conductor cilíndrico es constante, se puede concluir que los portadores de carga se están moviendo con una velocidad de desplazamiento, es decir, que tienen una cierta movilidad mov en presencia del campo eléctrico, que es una propiedad del material. Se observa que a un mayor campo aplicado al conductor, se tiene mayor corriente y por consiguiente una velocidad de desplazamiento mayor por lo tanto, existe una relación directa entre velocidad de desplazamiento y el campo, dependiendo de la movilidad (mov) de cada material, esto es:

$$\vec{v} = mov \vec{E}$$

Sustituyendo la velocidad de desplazamiento en la Ec. (4.3) tenemos:

$$\vec{J} = n e m o v \vec{E} = \sigma \vec{E} \quad (4.10)$$

La ecuación anterior se conoce con el nombre de **forma microscópica de la Ley de Ohm**, donde $n e m o v$ se llama conductividad σ del conductor y su recíproco, se conoce como resistividad y se representa por ρ . La ecuación (4.3) se puede escribir como:

$$J = \frac{I}{A} = \frac{1}{\rho} E$$

Dado que potencial está relacionado con el campo eléctrico a través de

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Entonces se tiene que

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = E L \quad (4.5)$$

Sustituyendo el campo en la ecuación anterior obtenemos:

$$V = \frac{L}{A} \rho I \quad (4.6)$$


esta relación se escribe más comúnmente como:

$$V = R I \quad (4.7)$$

La ecuación anterior se conoce con el nombre de **forma macroscópica de la Ley de Ohm**, donde R se conoce como la resistencia del conductor cilíndrico y está dada por:

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad (4.8)$$

como se puede ver en la ecuación (4.8) la resistencia de un conductor depende de la resistividad que es una propiedad intrínseca de cada material, de la longitud del conductor y su sección transversal.

La resistencia se representa simbólicamente por  y su unidad es:

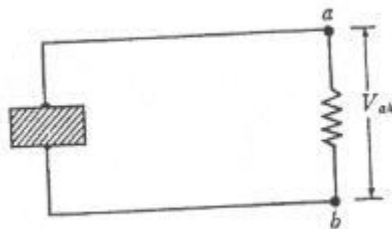
$$R = \frac{V}{I} \equiv 1 \left[\frac{V}{A} \right] = 1[\Omega]$$

De la ecuación (4.7) se puede conocer la resistencia de cualquier material, sin importar su forma geométrica, determinando el voltaje que se le aplica y la corriente que pasa por él.

43. Conversión de energía en una resistencia

Si conecta un artefacto que nos mantenga una diferencia de potencial a través de una resistencia como se muestra en la figura, (este artefacto se representa por un rectángulo rayado) para que un diferencial de carga dq se mueva a través de la resistencia en un tiempo dt , es necesario que el artefacto proporcione una cantidad de energía $dW = dU$, esto es:

$$dW = dq V_{ab}$$



donde $dq = I dt$ de la ecuación (4.2) y reemplazándolo en la expresión anterior tenemos que

$$dW = I dt V_{ab}$$

La razón de energía por unidad de tiempo es la potencia P que nos está dando el artefacto.

$$P = \frac{dW}{dt} = I V_{ab} \quad (4.9)$$

La unidad de potencia es el Watt que corresponde a:

$$P = \frac{W}{t} = 1 \left[\frac{J}{s} \right] = 1[W]$$

En las resistencias la energía aparece como calor, este proceso es termodinámicamente irreversible y se conoce como calentamiento por efecto Joule. Como las resistencias obedecen la ley de Ohm, sustituyendo, la Ec. (4.7), se obtiene la potencia en función de la resistencia y la corriente.

$$P = I^2 R \quad (4.10)$$

donde I es la corriente que pasa por la resistencia, en función del potencial y la resistencia.

$$P = V^2 / R \quad (4.11)$$

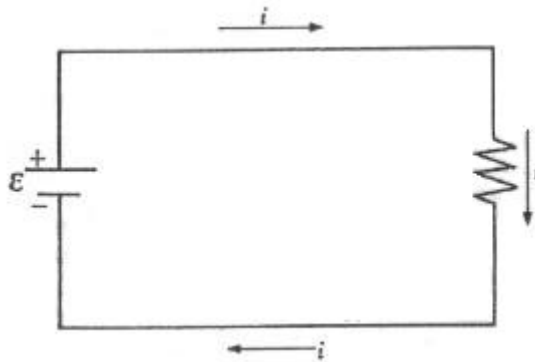
donde V es el voltaje a través de la resistencia.

4.4. Fuerza electromotriz

Algunas secciones anteriores se han referido a diferencias de potencial y campos eléctricos uniformes para poner cargas en movimientos; para lo cual se requieren fuentes de energía, que pueden ser dispositivos que conviertan energía química o mecánica, en eléctrica, como las baterías y generadores, que son fuentes de fuerza electromotriz fem y que se representa por ε .

Las *fem* más conocidas son las baterías, de automóviles y las pilas secas que convierten energía química en eléctrica, mientras que los generadores convierten energía mecánica en energía eléctrica; cuando se convierte energía eléctrica a mecánica entonces se tiene un motor.

En la siguiente figura la fem ε , está conectada a una resistencia por alambres ideales (conductores perfectos) que mantiene una corriente a través de ésta, La energía que se disipa en forma de calor en la resistencia es suministrada por la fuente.



Si se analiza los portadores de carga en el circuito de la figura anterior, se ve que al pasar de un potencial menor (terminal negativa) a uno mayor (terminal positiva) adquieren una energía que es equivalente al trabajo que hace la fuente para llevarlos del terminal negativo al terminal positivo, esto es

$$dW = \varepsilon dq \quad (4.12)$$

4.6. Circuitos eléctricos

En el circuito de la figura anterior, se concluye que la caída de voltaje en la resistencia es igual al voltaje de la fuente de *fem* ε ; utilizando la Ec. (4.7) de la ley de Ohm se puede determinar la corriente que pasa por la resistencia.

$$I = \frac{\varepsilon}{R}$$

aplicando el principio de conservación de la energía podemos llegar á mismo resultado, esto es:

Trabajo realizado por la fem ε en un dt = Energía disipada en R en un dt .

Dado que $\varepsilon \equiv V_{ab}$, entonces de $P = \frac{dW}{dt} = I V_{ab} = \varepsilon \frac{dq}{dt}$, se tiene

$$dW = \varepsilon dq = I dt \varepsilon$$

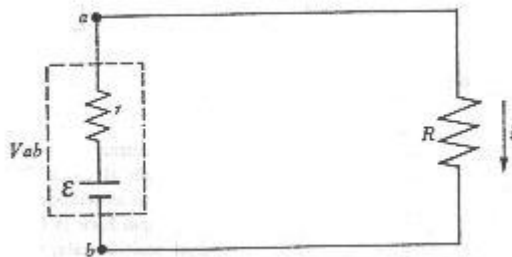
y que:

$$I dt \varepsilon = I^2 R dt$$

de donde obtenemos:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}$$

Al considerar una fuente de fem real en un circuito eléctrico simple (de una malla) vemos que tiene una resistencia interna r como se muestra en la figura



en la figura anterior, la corriente que pasa por los elementos componentes del circuito es la misma (corriente en la malla). Para calcular la corriente se puede utilizar el principio de conservación de la energía: Energía suministrada por la fem en un dt = Energía disipada por R en un dt .

$$\varepsilon dq - I^2 r dt = I^2 R dt$$

o bien:

$$\varepsilon I dt - I^2 r dt = I^2 R dt$$

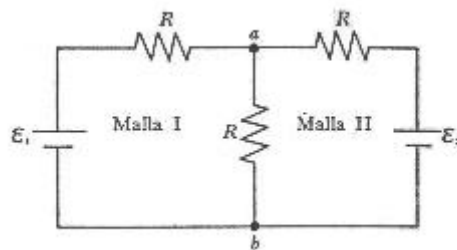
Simplificando

$$\varepsilon - I r = IR$$

y despejando

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

debido a que existen circuitos eléctricos más complicados, como el circuito de la siguiente figura que tiene dos mallas y dos nodos (un nodo es el punto en el circuito donde se interseccionan tres o más ramas de él)



Circuito de dos Malla y dos nodos a y b.

Para resolver estos circuitos, es necesario utilizar métodos apropiados como los que se verán en la sección siguiente.

4.7. Leyes de Kirchhoff

El principio de conservación de la energía y el de la conservación de la carga se pueden formular en forma práctica para la solución de circuitos complicados. Las dos leyes de Kirchhoff se basan en estos principios y se pueden enunciar de la manera siguiente:

Primera ley de Kirchhoff (teorema de los nodos). Para cualquier nodo de un circuito la suma algebraica de las corrientes debe ser cero.

$$\sum_{n=1}^N I_n = 0 \quad (4.13)$$

Esta ley se basa en el principio de conservación de la carga, ya que en ningún punto del circuito puede existir creación o aniquilación de ésta.

Segunda ley de Kirchhoff (teorema de la trayectoria). La suma algebraica de los cambios a potencial en el recorrido de cualquier malla de un circuito es cero.

$$\sum_{n=1}^N V_n = 0 \quad (4.14)$$

Esta ley es una consecuencia del principio de conservación de la energía, ya que de no ser así, una resistencia podría disipar cantidades de energías indeterminadas que la *fem* no podría suministrarla.

Para una aplicación práctica de las leyes de Kirchhoff tomarán las siguientes convenciones para facilitar la solución de circuitos eléctricos.

- a) Cuando se recorre una malla en un circuito y se atraviesa una resistencia en la dirección de la corriente, hay una diferencia de potencial igual a $- IR$ (caída de voltaje); en la dirección opuesta, es $+ IR$ (elevación de voltaje).
- b) Si una fuente de fem es atravesada en la dirección de la fem (de la terminal negativa a la terminal positiva) la diferencia de potencial es (+); en sentido contrario es (-).
- c) Las corrientes que entran a un nodo se toman como positivas y las que salen como negativas.

Problemas resueltos

Problema 4.1

Determine ¿ cuál es la velocidad de desplazamiento (de arrastre) para una corriente $I = 1[A]$ en un conductor de cobre de diámetro $0.163[cm]$?. Suponga que existe un solo electrón libre por átomo, encuentre primero que n_e coincide con la densidad numérica de los átomos de Cu. Y está dado por $n_e \approx 8.5 \times 10^{28} [electrones/m^3]$.

Solución:

Se tiene que:

$$n_e = N_A \rho_{Cu} PA_{Cu}$$

Donde

$$N_A = 6.022 \times 10^{23} [mol^{-1}] \text{ (Número de Avogadro)}$$

$$\rho_{Cu} = 8.95 \times 10^3 [kg/m^3]$$

$$PA_{Cu} = 63.5 [g/mol]$$

Sustituyendo estos valores, se encuentra:

$$n_e \approx 8.5 \times 10^{28} [m^{-3}]$$

Para determinar la velocidad de desplazamiento utilizamos la relación

$$J \equiv \frac{I}{A} = n_e e v_a$$

luego

$$v_a = \frac{I}{n_e e A}$$

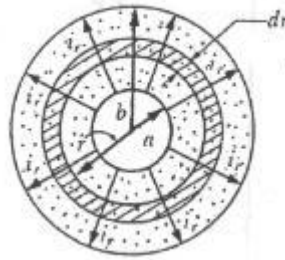
Sabiendo que $e = 1.6 \times 10^{-19} [C]$, después de reemplazar los valores respectivo se encuentra

$$v_a \approx 3.56 \times 10^{-3} [cm/s] = 3.56 \times 10^{-5} [m/s]$$

El resultado anterior, muestra que las velocidades de desplazamiento típicas son muy pequeñas

Problema 4.2

A una esfera maciza de hierro de radio b , con una cavidad esférica de radio a , se le aplica una diferencia de potencial V entre el interior y el exterior, de tal forma que fluye una corriente radial uniforme como se muestra en la figura, determine la potencia que se disipa.



Solución:

Aplicando la ecuación (4.8):

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

en forma diferencial para un cascarón esférico de radio r con un espesor dr como se muestra en la figura se tiene que el diferencial de resistencia es:

$$dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}$$

e integrado se obtiene la resistencia total:

$$R = \rho \int_b^a \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_a^b$$

evaluando:

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

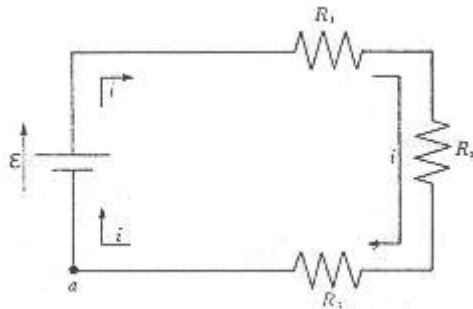
sustituyendo el valor obtenido de R , en la siguiente ecuación, se obtiene la potencia que se disipa, esto es:

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{4\pi V^2}{\rho} \left(\frac{ab}{b-a} \right)$$

Problema 4.3

Resistencias en serie. Se dice que dos o más resistencias están en serie cuando se conectan de forma tal que sólo hay una trayectoria de conducción entre ellas, es decir que la corriente que pasa por ellas es la misma. Demuestre que la resistencia equivalente del circuito es

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$



Solución

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff y siguiendo el circuito en el sentido de la corriente empezando en el punto a , se tiene:

$$\varepsilon - iR_1 - iR_2 - iR_3 = 0$$

de donde:

$$i = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Para la resistencia equivalente:

$$\varepsilon = iR \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R}$$

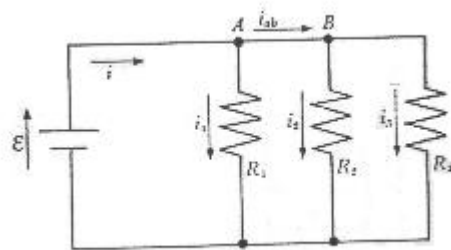
e igualando las expresiones se encuentra:

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

Problema 4.4

Resistencias en paralelo. Cuando varias resistencias se conectan de forma tal, que la diferencia de potencial que se les aplica es la misma para todas, se tiene una combinación en paralelo. Demuestre que una expresión para la resistencia equivalente del circuito de la Fig. es:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$



Solución:

Aplicando la primera ley de Kirchhoff en el nodo B se tiene:

$$i_{ab} - i_2 - i_3 = 0$$

entonces:

$$i_{ab} = i_2 + i_3$$

y en el nodo A:

$$i = i_1 + i_{ab} = i_1 + i_2 + i_3$$

Aplicando la ley de Ohm a cada resistencia:

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1}, \quad i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2}, \quad i_3 = \frac{\mathcal{E}}{R_3}$$

y sustituyendo en la ecuación de la corriente:

$$i = \varepsilon \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

Para la resistencia equivalente:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \varepsilon \left(\frac{1}{R} \right)$$

y combinando las ecuaciones:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Las ecuaciones para las resistencias equivalentes en los ejemplos anteriores se pueden generalizar; quedando, para n resistencias en serie:

$$R = R_1 + R_2 + \dots R_n = \sum_{i=1}^n R_i$$

y para n resistencias en paralelo:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

Problema 4.5

Encontrar la resistencia equivalente entre los puntos A y B del arreglo de la figura a). Tómnese los siguientes valores:

$$R_1 = R_2 = 1\Omega \quad R_3 = R_6 = 1\Omega \quad R_4 = R_5 = 4\Omega$$

Solución

Para encontrar la resistencia equivalente se ve primero cuáles están en serie y cuáles en paralelo para poder combinarlas y para facilitar esto se puede poner el circuito en la forma mostrada en la Fig. b). Ahora, se observa claramente que R_2 y R_3 , están en serie, luego.

$$R_{23} = R_2 + R_3$$

como muestra la figura c) donde podemos ver que R_{23} , R_4 y R_5 están en paralelo; entonces

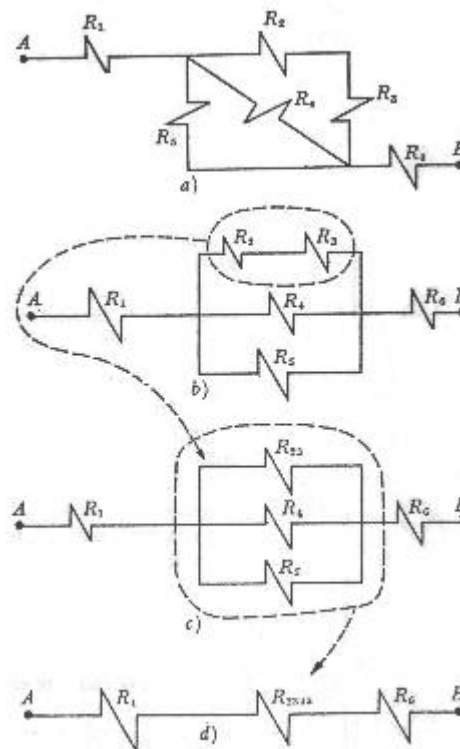
$$\frac{1}{R_{2345}} = \frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$

quedando esto como se muestra en la Fig. d) y como todas las resistencias quedan en serie:

$$R = R_1 = \frac{1}{\frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} + R_6$$

y sustituyendo valores:

$$R = 3\Omega$$

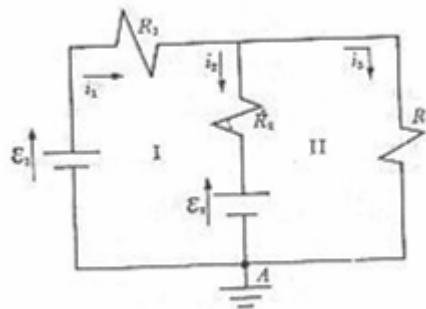


Problema 4.6

Del circuito mostrado en la figura encontrar la corriente que pasa por cada resistencia; tómonse los siguientes valores: $\varepsilon_1 = 15$ [V]; $\varepsilon_2 = 5$ [V]; $R_1 = 2[\Omega]$; $R_2 = 4[\Omega]$; $R_3 = 2[\Omega]$

Solución:

El primer paso para la solución de circuitos es siempre, escoger arbitrariamente el sentido de las corrientes en cada rama. En este problema se han seleccionado las corrientes de la forma en que se muestra en la figura sabiendo que en caso de que la corriente real sea en sentido contrario, los resultados matemáticos nos lo indicarán.



El nodo A está conectado a tierra y el valor del potencial es cero.

Al aplicar la segunda ley de Kirchhoff, siguiendo la trayectoria en la malla 1 del circuito a partir del punto A (que está conectado a tierra y el valor del potencial en A es cero), en el sentido de las manecillas del reloj y siguiendo las convenciones tomadas, se tiene:

$$\varepsilon_1 - i_1 R_1 - i_2 R_2 - \varepsilon_2 = 0$$

De la misma forma, para la trayectoria de la malla 2

$$\varepsilon_2 + i_2 R_2 - i_3 R_3 = 0$$

Aplicando la primera ley de Kirchhoff en el nodo A se tiene que

$$i_1 = i_2 + i_3$$

Hasta aquí, se puede ver que en estas 3 ecuaciones tienen 3 incógnitas que se pueden ordenar de la siguiente forma:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = i_1 R_1 + i_2 R_2 + i_3 i(0)$$

$$\varepsilon_2 = i_1(0) - i_2 R_2 + i_3 R_3$$

$$0 = i_1 - i_2 - i_3$$

En este sistema de 3 ecuaciones al sustituir valores y multiplicar por (-1) las dos primeras ecuaciones nos queda:

$$-10 = i_1(-2) + i_2(-4) + i_3(0)$$

$$\varepsilon_2 = i_1(0) + i_2(4) + i_3(-2)$$

$$0 = i_1(1) + i_2(-1) + i_3(-1)$$

que se puede resolver por determinantes:

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -4 & 0 \\ -5 & +4 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{40 + 20 + 20}{8 + 8 + 4} = \frac{80}{20} = 4[A]$$

$$i_1 = 4[A]$$

Sustituyendo en la segunda y tercera ecuación, se tiene :

$$4i_2 - 2i_3 = -5 \quad i_2 + i_3 = 4$$

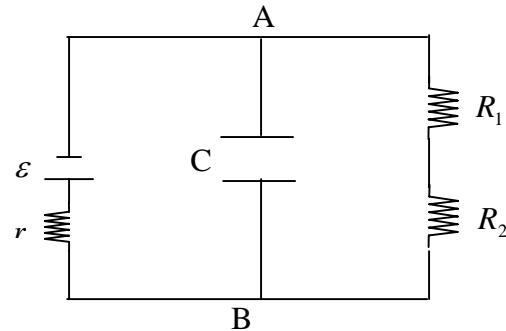
luego

$$i_2 = 0.5 [A], \quad i_3 = 3.5 [A]$$

Problema 4.7

Para el circuito de la figura considere los siguientes valores $R_1 = 10/3 [\Omega]$, $R_2 = 2R_1$, $C = 5[\mu F]$, $\varepsilon = 101[V]$, $r = 0.1[\Omega]$. Determine (en estado estacionario)

- a) La corriente que circula por el circuito
- b) V_{AB}
- c) La carga del q del condensador



Solución:

a) En estado estacionario no circula corriente por el condensador. Utilizando la ley de la trayectoria de Kirchhoff:

$$\sum V_N = 0$$

se tiene

$$\varepsilon - IR_1 - IR_2 - Ir = 0$$

luego

$$I = \frac{\varepsilon}{3R_1 + r} \equiv 10[A]$$

b) De la ley de Ohm: $V_{AB} = IR_{AB}$

dado que las resistencias conectadas en serie se suman, se tiene

$$R_{AB} = R_1 + R_2 \equiv 3R_1 = 10[\Omega]$$

Reemplazando, se encuentra

$$V_{AB} = IR_{AB} = 100[V]$$

c) De la definición de capacidad, se puede escribir

$$C = \frac{q}{V_{AB}}$$

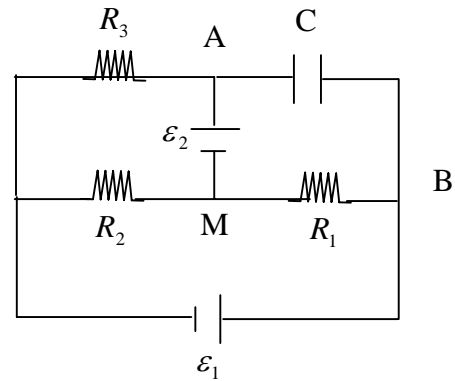
Luego

$$q = CV_{AB} = 500[\mu C]$$

Problema 4.8

Para el circuito de la figura considere los siguientes valores $R_1 = 10[\Omega]$, $R_2 = 20[\Omega]$, $R_3 = 30[\Omega]$, $\varepsilon_1 = 4[V]$ y $\varepsilon_2 = 1[V]$. Determine (en estado estacionario)

- a) Las corrientes que circulan por las resistencias
- b) V_{AB}



Solución:

a) En estado estacionario no circula corriente por el condensador.

Supongamos lo siguiente:

En el nodo M: $I_1 + I_2 = I$

En la malla superior

$$\varepsilon_2 - IR_3 - I_1R_2 = 0$$

En la malla inferior

$$\varepsilon_1 - I_2R_1 + I_1R_2 = 0$$

Combinando estas ecuaciones se encuentra:

$$I = 0.1[A] \text{ (corriente que circula por } R_3)$$

$$I_1 = -0.1[A] \text{ (corriente que circula por } R_2)$$

$$I_2 = 0.2[A] \text{ (corriente que circula por } R_1)$$

CAPÍTULO V

CONDENSADORES Y DIELECRICOS

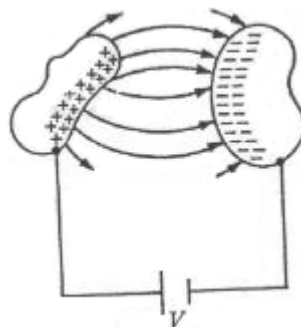
5.1. Definición de capacidad o capacitancia

Si dos conductores aislados se conectan a una *fem* como se muestra en la Fig., se produce una diferencia de potencial entre ellos; para producir esta diferencia de potencial se requiere llevar carga de un conductor al otro y por consiguiente realizar un trabajo, el cual es hecho por la *fem*. Todo el sistema tiene una carga neta cero ya que los conductores tienen igual carga pero signo contrario. La carga que tienen los conductores depende de la *fem* que los conecta y de otros factores tales como la distancia entre ellos, su tamaño y su forma geométrica. Es decir, que si todos estos factores permanecen constantes excepto la *fem*, entonces la carga es directamente proporcional a la diferencia de potencial producida por la *fem* entre los conductores, esto es:

$$q = CV \tag{5.1}$$

donde q es la magnitud de la carga en cada uno de los conductores, V es el potencial entre ellos y C es la constante de proporcionalidad que se define como la capacitancia; este hecho lo podemos comprobar experimentalmente. El arreglo de los conductores que se muestra en la siguiente figura se conoce como condensador.

La Ec. (5.1) define la capacidad o capacitancia de un condensador. Por otro lado, cuando se habla de carga en un condensador, se hace referencia a la carga en la placa positiva y no a la carga neta del condensador que es cero.



Los condensadores se representan esquemáticamente por el símbolo $\text{-----} | \text{-----}$; la unidad de la capacitancia es el farad en honor de Michael Faraday; entonces, un condensador tiene una capacitancia de $1[\text{Farad}] = 1[\text{F}]$ cuando la carga es de $1[\text{C}]$ y su diferencia de potencial es de $1[\text{V}]$, de modo que:

$$1 [\text{F}] = 1 [\text{C/V}]$$

debido a que las dimensiones geométricas de un condensador para que su capacitancia sea de un farad, son demasiado grandes, es conveniente usar submúltiplos del farad, tales como:

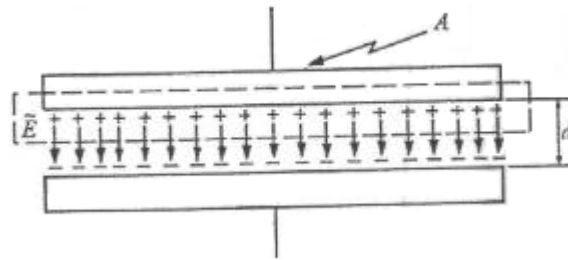
$$1 [\text{microfarad}] = 1 [\mu \text{F}] = 10^{-6} [\text{F}]$$

$$1 [\text{PicoFarad}] = 1[\text{PF}] = 1 [\mu\mu \text{F}] = 10^{-12} [\text{F}]$$

ya que la carga de un condensador dado, está en función únicamente del voltaje que se le aplica, tiene que haber un límite máximo en el voltaje, ya que de no ser así, se generaría tanta carga en los conductores que se produce un chispazo entre ellos, que comúnmente se conoce por cortocircuito. Los condensadores nos pueden generar campos eléctricos uniformes, que se utilizan para acelerar o desviar partículas cargadas, también dado que se pueden obtener campos eléctricos al cargar un condensador, entonces este último nos puede servir para almacenar energía eléctrica.

5.2. Condensador de placas paralelas

Uno de los condensadores que dado lo simple de su geometría, es muy fácil analizar, es el condensador de placas paralelas que se muestra en la Fig.. Este consiste en un par de placas paralelas de área “A” y separadas una distancia “d”; para despreciar las deformaciones de las líneas de campo eléctrico en los bordes de las placas consideramos que “d” es muy pequeña comparada con las dimensiones de “A”, obteniendo un campo uniforme entre las placas. Al aplicar una diferencia de potencial a las placas, aparecerá una carga + q en un placa y una carga - q en la otra. Como existe una atracción entre las cargas, éstas aparecen en la cara interior de las placas obteniéndose entonces, un campo uniforme entre ellas.



Para calcular la capacidad del condensador de placas paralelas se aplica la Ley de Gauss, para obtener el campo eléctrico entre las placas se utiliza una superficie gaussiana de forma cilíndrica, una de las tapas del cilindro quedaría dentro de la placa y la otra entre las placas como se muestra en la figura anterior, donde vemos que el flujo eléctrico en la tapa superior del cilindro como en su superficie lateral es cero, en la primera porque dentro de la placa conductora no existe campo y en la superficie lateral porque el $d\vec{s}$ hace un ángulo de 90° con el campo eléctrico entre las placas; en la tapa inferior del cilindro que está entre las placas el flujo no es cero, ya que el campo es paralelo a la dirección del vector área, esto es:

$$\Phi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E A$$

y:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = q / \epsilon_0$$

entonces:

$$q = \epsilon_0 E A \tag{5.2}$$

como la capacitancia está definida en términos de carga y potencial, debemos expresar el campo eléctrico en función del potencial. Esto se puede hacer considerando que el trabajo necesario para llevar una carga prueba de la placa negativa a la placa positiva es:

$$W = q_0 V$$

o a partir del producto de la fuerza $q_0 E$ que hay que ejercer sobre la del carga prueba, por la distancia d , es decir:

$$W = (q_0 E) d$$

igualando ambas expresiones y despejando V se tiene:

$$V = E d \quad (5.3)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.2) y (5.3) en la Ec. (5.1) se obtiene que:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\epsilon_0 E A}{E d} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (5.4)$$

donde C es la capacidad del condensador de placas paralelas; y se puede observar que la capacidad depende únicamente de la geometría del condensador, esto es, si se mantiene constante el potencial entre las placas y se aumenta el área A , se incrementa la carga y por consiguiente la capacidad. Si mantenemos constante la carga y se incrementa la distancia d entre las placas, la diferencia de potencial aumenta y por consiguiente disminuye la capacidad.

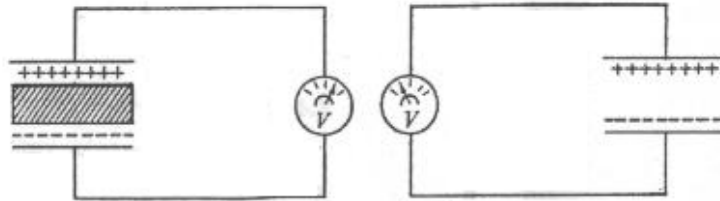
5.3. Dieléctricos en condensadores

En la práctica la mayoría de los condensadores tienen material dieléctrico con el fin de que su capacidad de almacenamiento de carga aumente y por consiguiente la capacitancia del condensador.

Uno de los experimentos realizados por Faraday con condensadores consiste este aplica la misma diferencia de potencial a dos condensadores de placas paralelas de iguales dimensiones, geométricos uno al vacío y otro con un dieléctrico (plástico, porcelana, papel, etc.) que llene completamente la región entre las placas, y encontró que el condensador con dieléctrico almacena más carga que el condensador al vacío; si se realiza un experimento similar, pero en vez de aplicar el mismo potencial, proporcionando cargas iguales a cada condensador por separado y se les conecta a voltímetros de alta precisión tal como como se muestra en la Fig., se puede ver que el voltímetro conectado al condensado al vacío marca un voltaje mayor V_0

que el voltaje V_d del condensador con dieléctrico. A partir de la ecuación (5.1) si se considera que las cargas son iguales, se tiene la siguiente relación:

$$\frac{C}{C_0} = \frac{V_0}{V_d}$$



Esta relación se define como la constante dieléctrica k , entonces:

$$k \equiv \frac{C}{C_0} \tag{5.5}$$

Esto permite concluir que la capacidad de un condensador de placas paralelas con un dieléctrico que lo llene completamente es:

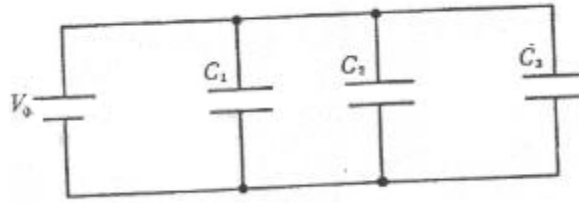
$$C = k C_0 = k \frac{\epsilon_0 A}{d} \tag{5.6}$$

la constante dieléctrica en el vacío es igual a la unidad.

5.4. Conexión de condensador en serie y en paralelo

En el capítulo anterior se consideró cómo simplificar arreglos de resistencias mediante combinaciones equivalentes en serie y en paralelo. En esta sección se estudiará cómo simplificar arreglos de condensadores mediante combinaciones en serie y paralelo para obtener capacidades equivalentes.

En la siguiente Fig. se tienen tres condensadores con capacitancias C_1, C_2 y C_3 , en paralelo, conectados a una fuente fem con voltaje V_0 .



En la figura anterior, se observa que la diferencia de potencial es la misma para cada uno de los condensadores y utilizando la ecuación (5.1) se tiene que la carga en cada uno de los condensadores es:

$$q_1 = C_1 V_0 \quad q_2 = C_2 V_0 \quad q_3 = C_3 V_0$$

Un condensador equivalente C_e es aquel que al mismo voltaje almacena igual cantidad de carga que la del arreglo al cual sustituye; la carga total o equivalente para una combinación de condensadores en paralelo es la suma de la carga de cada uno, esto es:

$$q_e = q_1 + q_2 + q_3$$

Según la Ec. (5.1):

$$q_e = C_e V_0$$

Sustituyendo el valor de la carga equivalente se tiene:

$$q_1 + q_2 + q_3 = C_e V_0$$

de la Ec. (5.1) vemos que:

$$C_1 V_0 + C_2 V_0 + C_3 V_0 = C_e V_0$$

Para un arreglo de N condensadores en paralelo siguiendo el mismo procedimiento se obtiene:

$$C_e = \sum_{i=1}^n C_i \tag{5.7}$$

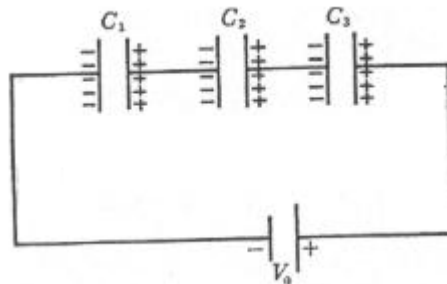
Para un arreglo de condensadores en serie conectadas a una fuente fem con voltaje V_0 , como se muestra en la Fig. podemos calcular la capacitancia equivalente utilizando la segunda Ley de Kirchhoff (teorema de la trayectoria) la suma de la caída de voltaje en cada uno de los condensadores es igual al voltaje de la fem, esto es:

$$V_0 = V_1 + V_2 + V_3 \tag{5.8}$$

De la Ec. (5.1) se tiene que:

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} \quad V_2 = \frac{q_2}{C_2} \quad V_3 = \frac{q_3}{C_3}$$

recurriendo al principio de la conservación de la carga se observa que en el circuito de la Fig. la carga de la placa negativa de C_1 , es de la misma magnitud que la carga de la placa positiva de C_3 , y por inducción eléctrica se concluye que la carga en cada condensador es la misma; así como la carga del condensador equivalente, esto es:



Condensadores en serie.

y combinando las Ecs. (5.1) y (5.8) se tiene que:

$$\frac{q_e}{C_e} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3}$$

y como todas las cargas son iguales, entonces:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Para un arreglo de N condensadores en serie siguiendo el mismo método se obtiene:

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (5.9)$$

La capacitancia equivalente de un arreglo en serie será menor que cualquiera de las capacitancias que forman el arreglo, así como en un arreglo de capacitancias en paralelo la capacitancia equivalente, siempre será mayor que cualquiera de las capacitancias del arreglo.

5.5. Energía almacenada por un condensador

En la sección 5.1 al conectar los conductores a la fuente fem, ésta realiza un trabajo al llevar carga de un conductor a otro; si se desea llevar un diferencial de carga dq de un conductor a otro, entonces la fuente tiene que realizar un diferencial de trabajo dW , es decir:

$$dW = V dq$$

de la Ec. (5.1) se tiene:

$$dW = \frac{q}{C} dq$$

la cantidad de trabajo que tiene que realizar la fuente para llevar una carga total q y la carga inicial de los conductores es cero, entonces:

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C} \quad (5.10)$$

esta ecuación también se puede escribir en función de la diferencia de potencial entre los conductores a partir de la Ec. 5.1, esto es:

$$W = \frac{1}{2} CV^2 \quad (5.11)$$

al realizar la fuente el trabajo de llevar carga de un conductor a otro se establece un campo eléctrico entre éstos y por consiguiente se almacena energía potencial eléctrica que es equivalente al trabajo realizado por la fuente.

$$W_E \equiv U_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 \quad (5.12)$$

Lo más razonable es que esta energía esté almacenada en el campo eléctrico y por consiguiente es necesario introducir el concepto de densidad de energía del campo eléctrico y para obtenerla en forma sencilla se considera un condensador de placas paralelas despreciando las distorsiones del campo-en los bordes de las placas, es decir, que el campo eléctrico es uniforme y constante entre las placas. La densidad de energía se define como la energía potencial eléctrica entre el volumen, esto es:

$$u_E = \frac{W_E}{A d} = \frac{\frac{1}{2} C V^2}{A d}$$

donde (A d) es el volumen entre las placas del condensador y sustituyendo la capacitancia del condensador de placas paralelas:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

en la expresión anterior se tiene:

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{V}{d} \right)^2$$

donde V/d es la intensidad del campo eléctrico de la Ec. (3.2), de tal forma que la densidad de energía eléctrica u_E se expresa como:

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (5.13)$$

aunque esta expresión se derivó para un condensador de placas paralelas, es una ecuación general que se aplica en cualquier caso; es decir que en cualquier región del espacio en el

vacío, hay una cantidad de energía almacenada por unidad de volumen cuando existe un campo eléctrico E en esa región.

Para regiones con dieléctricos la densidad de energía eléctrica se expresa por:

$$u_E = \frac{1}{2} K \epsilon_0 E^2 \quad (5.14)$$

A partir de la Ec. (5.6).

Comentario:

En general la densidad de energía eléctrica se define como

$$u_E = \frac{dW_E}{dv}$$

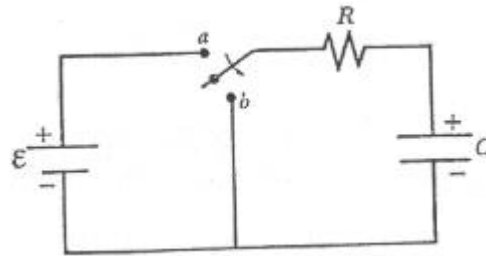
De donde se desprende que la energía eléctrica u_E (energía eléctrica W_E por unida de volumen v) queda determinada a través de la siguiente ecuación

$$W_E = \iiint u_E dv$$

Si ocurre que u_E es constante, entonces se obtiene $W_E = u_E v$

5.6. Circuitos RC

Hasta ahora hemos estudiado circuitos con corrientes estables, es decir, corrientes que no cambian con el tiempo, en esta sección vamos a estudiar circuitos simples que tengan resistencias y condensadores para obtener corrientes variables en el tiempo. En la Fig. un condensador y una resistencia están conectados en serie a una fuente fem \mathcal{E} . Si inicialmente el interruptor está abierto la carga en el condensador es cero, es decir, que no existe ningún voltaje en el condensador.



Al pasar el interruptor al punto *a*, fluye una carga en el sentido de las manecillas del reloj, de tal forma que el condensador se empieza a cargar produciéndose una diferencia de potencial en el condensador que tiende a ser de igual magnitud al de la fuente a medida que el tiempo transcurre y el flujo de carga tiende a cero. Usando el teorema de la trayectoria podemos obtener una expresión de cómo varía la diferencia de potencial del condensador en función del tiempo, siguiendo una trayectoria en la dirección de las manecillas del reloj tenemos que:

$$\varepsilon - IR - V_c = 0 \tag{5.15 a}$$

donde el voltaje lo podemos expresar en función de la carga y la corriente de acuerdo a las ecuaciones (4.2) y (5.1) entonces, la Ec. (5.15 a), la podemos expresar como:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} - \varepsilon = 0 \tag{5.15 b}$$

que es una ecuación diferencial de primer orden, la cual podemos resolver tomando como condiciones del circuito *RC* que para $t = 0$, $q = 0$ y para un tiempo t en el que el interruptor está en la posición "a", el condensador adquiere una carga q . Resolviendo la Ec. (5.15) b:

$$dq = \frac{\varepsilon C - q}{RC} dt$$

de donde:

$$\frac{dq}{\varepsilon C - q} = \frac{1}{RC} dt$$

integrando:

$$\int_0^a \frac{dq}{\varepsilon C - q} = \frac{1}{RC} \int dt$$

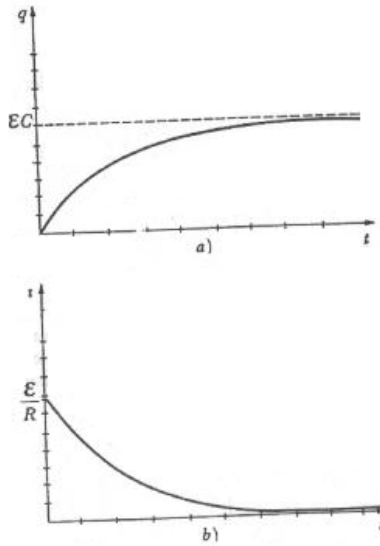
se obtiene que:

$$\ln (\varepsilon C - q) \Big|_0^a = - \frac{1}{RC} t \Big|_0^t$$

evaluando y despejando q se obtiene la expresión que nos da la carga almacenada en el condensador en un tiempo t , esto es:

$$q = \varepsilon c (1 - e^{-t/RC}) \tag{5.16}$$

al analizar la ecuación (5.16) se ve que para un tiempo $t = 0$, o sea antes de conectar el interruptor en el punto a de la figura anterior, la carga en el condensador es cero, si el interruptor permanece indefinidamente conectado, entonces $t \rightarrow \infty$ y la carga almacenada tiende a εC ; en la Fig. siguiente (a), se puede ver la variación de la carga con respecto al tiempo que es la representación gráfica de la Ec. anterior. Si deseamos obtener la razón de flujo de carga por unidad de tiempo o corriente que circula en el circuito, si se deriva (5.16) con respecto al tiempo se obtiene:



$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} \tag{5.17}$$

Se observa en Ec. (5.17) que la máxima corriente se obtiene en el preciso momento en el cual el circuito RC se conecta a la fuente fem o sea para $t = 0, I = \varepsilon / R$.

Si el interruptor permanece por un largo tiempo en esa posición, es decir, que $t \rightarrow \infty$ entonces, $I \rightarrow 0$ que lo podemos ver al graficar la ecuación (5.17), Fig. *b*.

El producto RC que se encuentra en el exponente de las ecuaciones (5.16) y (5.17) tiene unidades de tiempo ya que el exponente no debe tener unidades, este producto RC se conoce como constante de tiempo capacitiva (comúnmente se representa por τ_c), y nos determina la razón con la cual el condensador se carga.

Si el interruptor ha permanecido por un largo periodo de tiempo ($t \gg \tau_c$) conectado en el punto *a* y se cambia al punto *b*. entonces, tendríamos que en el circuito RC el condensador actúa como fuente corriente circula en la dirección opuesta a las manecillas de] reloj; cuando el teorema de la trayectoria, tenemos que:

$$\frac{q}{C} + IR = 0$$

con la Ec. 4.2 tenemos:

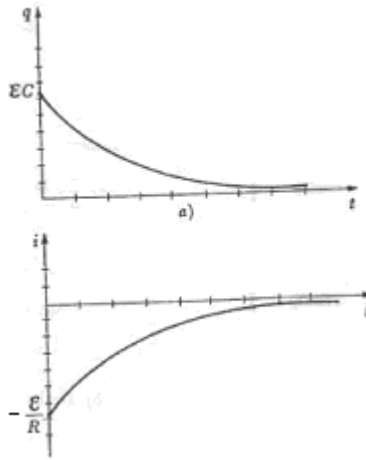
$$\frac{dq}{dt} = - \frac{q}{RC}$$

Integrando la Ec. 5.18 *b* y considerando que para $t = 0$ el condensador almacena una carga εC y para un tiempo t la carga es q obtenemos que:

$$q = \varepsilon C e^{-t/RC}$$

donde podemos ver que si el interruptor permanece indefinidamente conectado la carga en el condensador tiende a cero, así como también se comprueba que para un tiempo cero la carga

inicial en el condensador es εC (Fig. a). Si se desea saber el voltaje de la fuente se divide la carga entre la capacitancia.



La corriente en el circuito se puede obtener al derivar la Ec. 5.19 con respecto al tiempo esto es:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}$$

de esta ecuación observamos que la máxima corriente la tenemos para $t = 0$ y es $-\varepsilon / R$; para $t \gg RC$ la corriente tiende a cero como lo podemos apreciar en la gráfica de la Fig. b.

Problemas resueltos

Problema 5.1

Calcule el radio de un cascarón esférico para que tenga la capacidad de 1 Farad.

Solución:

de la ecuación (5.1) se tiene:

$$C = q/V$$

dado que

$$V = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

como el campo es $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$, sustituyendo e integrando, se encuentra

:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Luego:

$$C = \frac{q}{V} = 4\pi\epsilon_0 r = 1[\text{F}]$$

y despejando:

$$r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ [m]}.$$

El resultado anterior muestra que el farad es una unidad extremadamente grande y por consiguiente en la práctica es necesario usar submúltiplos.

Problema 5.2

Determine la capacidad de un **condensador de caras o placas paralelas**.

Solución:

Según la definición de capacidad $C = \frac{q}{V}$

En esta caso $V = Ed$ y $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 A}$, entonces

$$V = Ed = \frac{qd}{\epsilon_0 A}$$

Reemplazando del valor del potencial en la ecuación de la capacidad, se encuentra

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{qd}{\epsilon_0 A}} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Luego

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Problema 5.3

Determine la capacidad de un **condensador esférico**.

Solución:

Un condensador esférico está formado por dos cascarones esféricos metálicos concéntricos de radios: a el interior y cargado con $+q$, y radio b el exterior cargado con $-q$.

Utilizando la expresión

$$C = \frac{q}{V}$$

la diferencia de potencial entre los cascarones a partir de

$$V_{ba} = -\int_b^a E dr$$

Dado que es campo entre los cascarones esféricos es $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$, se tiene

$$V_{ba} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_b^a \frac{dr}{r^2}$$

Integrando, se encuentra:

$$V_{ba} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Sustituyendo en la ecuación para la capacidad, se obtiene

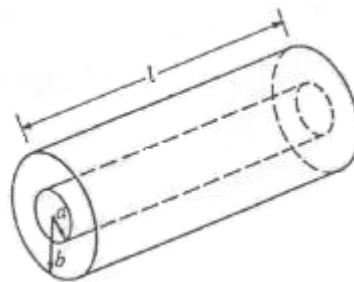
$$C = \frac{q}{V_{ba}} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}$$

luego

$$C = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a} \right)$$

Problema 5.4

Un **condensador cilíndrico** consiste en dos cascarones cilíndricos coaxiales de radios a y b respectivamente y longitud l (Fig.), calcular su capacitancia despreciando las irregularidades en los extremos.



Solución:

De (5.1): $C = q/V$

de (3.3) para el potencial tenemos que:

$$V = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

donde E entre los cascarones se puede obtener mediante la Ley de Gauss; esto es:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

entonces:

$$E(2\pi r l) = q / \epsilon_0$$

y

$$E = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 r l}$$

Sustituyendo en la Ec. (3.3) para obtener el potencial:

$$V = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = +\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{q}{2\pi \epsilon_0 r l} \frac{dr}{r}$$

integrando y evaluando:

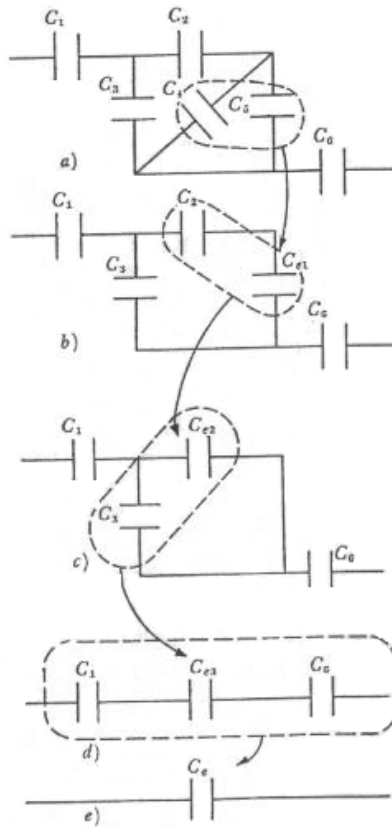
$$V = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 l} \ln r \Big|_a^b = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 l} \ln \frac{b}{a}$$

Sustituyendo en la Ec. (5.1) para obtener la capacitancia:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi \epsilon_0 l}{\ln b/a}$$

Problema 5.5

Calcular la capacitancia equivalente del arreglo de condensadores de la Fig. a, donde $C_1 = 1 \mu F$, $C_2 = 4 \mu F$, $C_3 = 1 \mu F$, $C_4 = 3 \mu F$, $C_5 = 1 \mu F$ y $C_6 = 3/2 \mu F$.



Solución:

De la parte a) de la figura vemos que los condensadores encerrados en el lazo están en paralelo, entonces de la Ec. (5.7), la capacitancia equivalente de estos es:

$$C_{e1} = C_4 + C_5 = 3 \mu F + 1 \mu F = 4 \mu F$$

A su vez ésta está en serie con la capacitancia de $4 \mu F$ como se muestra en la parte b); entonces aplicamos la Ec. (5.9) y obtenemos que:

$$\frac{1}{C_{e2}} = \frac{1}{C_{e1}} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4\mu F} + \frac{1}{4\mu F} = \frac{2}{4\mu F} = \frac{1}{2\mu F} \Rightarrow C_{e2} = 2\mu F.$$

En la parte *c*) vemos que C_{e2} , está en paralelo con C_3 , encerramos ambos en el lazo, entonces:

$$C_{e3} = C_{e2} + C_3 = 3\mu F$$

Por último, en la parte *d*) vemos que los tres condensadores están en serie, entonces:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_{e3}} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_6} = \frac{6}{3\mu F} + \frac{2}{1\mu F}$$

de dónde:

$$C_e = \frac{1}{2}[\mu F].$$

Problema 5.6

En un **condensador de placas paralelas se colocan 3 materiales dieléctricos distintos** como se muestra en la Fig. *a*. Calcule la capacitancia de este condensador.

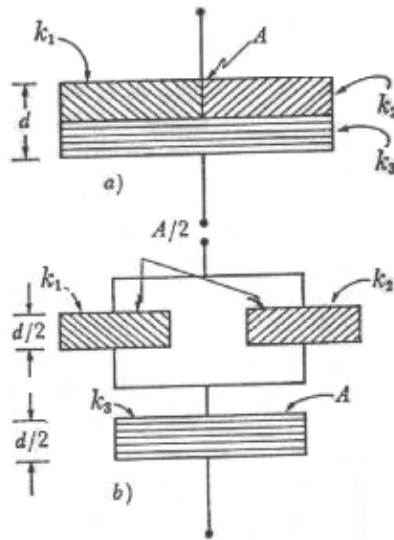
Solución:

Un arreglo lógico equivalente de este condensador es el mostrado en la parte *b* de la figura; de la Ec. (5.6) tenemos que

$$C_1 = \frac{k_1 \varepsilon_0 A}{d} \quad C_2 = \frac{k_2 \varepsilon_0 A}{d} \quad C_3 = \frac{k_3 \varepsilon_0 A}{(d/2)} = \frac{2k_3 \varepsilon_0 A}{d}$$

como C_1 y C_2 están en paralelo la combinación de éstos es su suma; entonces:

$$C_{e(1,2)} = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} (k_1 + k_2)$$



y éste a su vez está en serie con C_3 , entonces C_e , la capacitancia equivalente, está dada por:

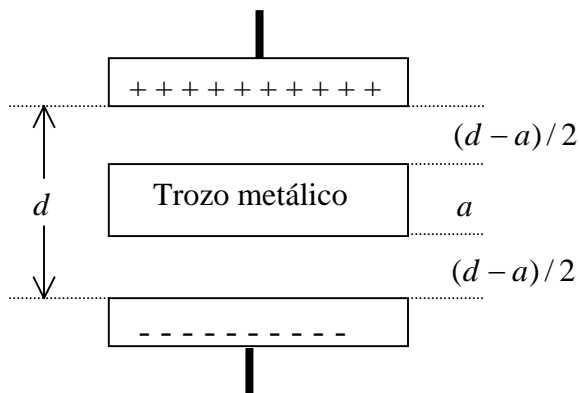
$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_{e(1,2)}} + \frac{1}{C_3} = \frac{d}{\epsilon_0 A(k_1 + k_2)} + \frac{d}{2k_3 \epsilon_0 A}$$

de donde resulta:

$$C_e = \frac{\epsilon_0 A}{d} \left(\frac{2k_3(k_1 + k_2)}{k_1 + k_2 + 2k_3} \right)$$

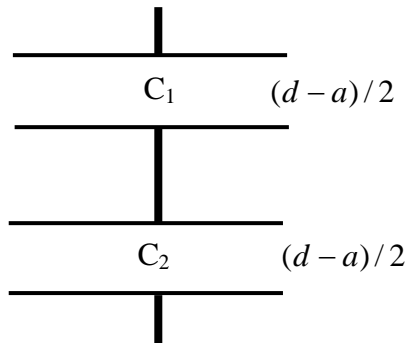
Problema 5.7

Un condensador de caras paralelas tiene una separación d y una sección de área A . Un trozo metálico descargado de espesor a se introduce en la parte media entre las placas. Determine la capacidad del sistema



Solución:

El sistema de la figura anterior es equivalente a dos condensadores conectados en serie, cada uno con separación de $(d - a)/2$



Dado que los condensadores están en serie, se tiene que la capacidad equivalente es:

$$\frac{1}{C_E} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Utilizando el resultado del problema 5.2. se tiene:

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{(d - a)/2} \text{ y } C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{(d - a)/2} \Rightarrow C_1 = C_2$$

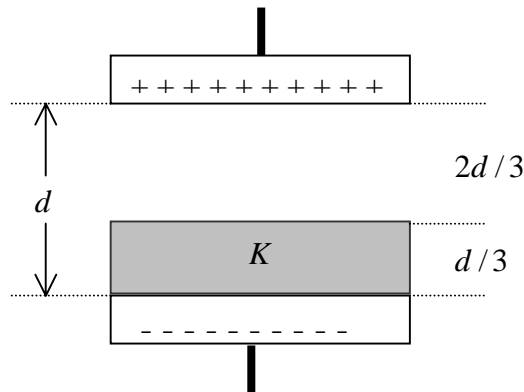
Entonces

$$\frac{1}{C_E} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} = \frac{2}{C_1} \Rightarrow$$

$$C_E = C_1 / 2 \equiv \frac{\epsilon_0 A}{(d - a)}$$

Problema 5.8

Considere un condensador de placas paralelas con una separación d , que tiene una capacidad $C_0 = \epsilon_0 A/d$ cuando se encuentra sin dieléctrico. Determine la capacidad cuando se introduce un material dieléctrico de constante dieléctrica K y espesor $d/3$ entre las placas.



Solución:

El sistema de la figura anterior es equivalente a dos condensadores conectados en serie, uno al vacío C_1 , con una separación de $2d/3$, y el otro (el inferior) C_2 con dieléctrico, y con una separación de $d/3$

Dado que los condensadores están en serie, se tiene que la capacidad equivalente es:

$$\frac{1}{C_E} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Utilizando el resultado del problema 5.2. se tiene:

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{2d/3} \quad \text{y} \quad C_2 = K \frac{\epsilon_0 A}{d/3}$$

Entonces

$$\frac{1}{C_E} = \frac{1}{\frac{\epsilon_0 A}{2d/3}} + \frac{1}{K \frac{\epsilon_0 A}{d/3}} = \frac{2d}{3\epsilon_0 A} + \frac{d}{3K\epsilon_0 A}$$

$$\frac{1}{C_E} = \frac{1}{3} \left(\frac{1+2K}{K} \right) \left(\frac{d}{\epsilon_0 A} \right)$$

Luego

$$C_E = \left(\frac{3K}{1+2K} \right) \frac{\epsilon_0 A}{d} \equiv \left(\frac{3K}{1+2K} \right) C_0$$

Problema 5.9

La diferencia de potencial entre dos cascarones esféricos metálicos concéntricos de radios $a = 1$ [m] y $b = 2$ [m] es de 9000 [V]. Calcule la energía electrostática almacenada en el espacio que existe entre los cascarones.

Solución:

Sabiendo que la diferencia de potencial entre las esferas (ver problema 5.3) es:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

despejando q :

$$q = \frac{4\pi\epsilon_0(ab)}{(b-a)} V$$

sustituyendo valores se tiene:

$$q = 2 \times 10^{-6} \text{ [C]}$$

de la Ley de Gauss:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

se obtiene que el campo entre las dos esferas:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

de la Ec. (5.13), la densidad de energía es:

$$u_E = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$$

La energía total W_E se obtiene integrando el producto de la densidad de energía por el diferencial de volumen esférico entre las esferas, esto es:

$$W_E = \iiint u_E dV$$

donde

$$dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

En este caso, dado que u_E sólo depende de r , se tiene que:

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

luego

$$W_E = \iiint u_E dV = \int_a^b \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr$$

integrando y evaluando

$$W_E = \int_a^b \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

sustituyendo valores:

$$W_E = 9 \times 10^{-3} \text{ [J]}.$$

CAPÍTULO VI

CAMPO MAGNÉTICO Y FUERZA MAGNETICA

Campo magnético

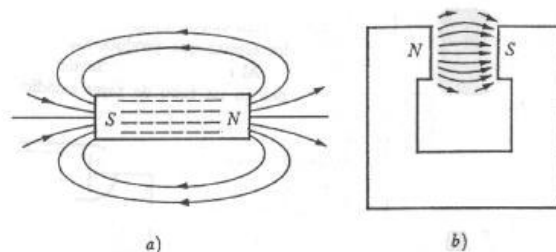
La región en el espacio donde un imán experimenta una atracción o repulsión se conoce como campo magnético. El vector campo magnético se conoce también por Inducción Magnética \vec{B} .

6.1. Líneas de inducción y Flujo magnético

Así como el campo eléctrico se representa gráficamente por medio de las líneas de fuerza, el campo magnético se va a representar por las líneas de inducción que son muy útiles en el análisis cualitativo y en algunos casos ayudan a resolver problemas analíticamente.

De la figura siguiente, se observan las siguientes relaciones entre las líneas de inducción y el campo magnético.

1. La tangente a la línea de inducción en cualquier punto es paralela al campo magnético en ese punto.
2. El número de líneas de inducción por unidad de área de sección transversal en una región del espacio está en relación directa a la magnitud del campo magnético. Por consiguiente donde las líneas están muy cercanas entre sí, el campo es más intenso que donde están separadas.



3. La dirección de las líneas de inducciones es del Polo Norte al Polo Sur.

4. Las líneas de inducción nunca se cruzan.

Cuando se trabaja con problemas de campos magnéticos en un plano se adopta la convención de representar el campo magnético entrando en un plano por una cruz (\times) y saliendo del plano por un punto (\bullet).

El flujo magnético se define en forma similar al flujo eléctrico, como una integral de superficie sobre la componente normal del campo magnético \vec{B} , un diferencial de flujo magnético está dado por:

$$d\Phi_M = B_n ds$$

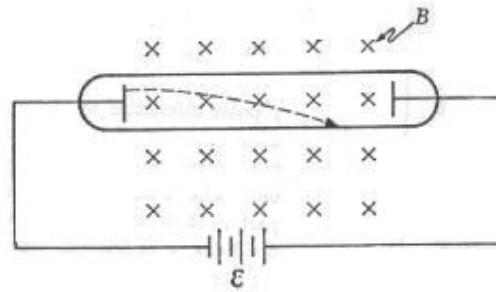
donde B_n es la componente normal del campo magnético y ds el diferencial de área, es decir, el flujo magnético para una superficie determinada (abierta o cerrada) es la integración del producto punto del vector campo magnético y el vector diferencial de área. Esto es:

$$\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (6.1)$$

Como se verá en los capítulos siguientes, tanto el flujo magnético como el flujo eléctrico, son conceptos básicos para realizar el estudio del Electromagnetismo.

6.3. Fuerza magnética sobre una partícula cargada en movimiento. (Definición de campo magnético).

Un campo magnético se puede estudiar experimentalmente observando los efectos que produce sobre cargas en movimiento. En la siguiente figura se observa que la fuerza con que es desviado el flujo de electrones depende de la intensidad del campo magnético B , la velocidad de los electrones y del seno del ángulo entre el vector campo magnético y el vector velocidad.



La relación entre el campo magnético, el vector velocidad de la partícula cargada y su carga se puede expresar con la siguiente ecuación:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (6.2)$$

De la ecuación anterior se puede definir el campo magnético B , y encontrar que:

$$B = \frac{F}{qv \sin \theta} \quad (6.3)$$

Las unidad del campo magnético en el sistema MKS es el **Tesla [T]**, que también se conoce como **Weber/m²**, que según la ecuación anterior corresponde a:

$$1 \left[\frac{\text{Weber}}{m^2} \right] \equiv 1 \left[\frac{N}{Am} \right] = 1[T]$$

La unidad que se usó inicialmente para el campo magnético fue el Gauss (sistema cgs.) y la relación entre Tesla y el Gauss es:

$$1\text{Tesla} = 10^4 \text{ Gauss.}$$

6.3. Fuerza sobre un conductor con corriente

En la sección 6.3 encontrarnos la fuerza que ejerce un campo magnético sobre una partícula cargada en movimiento (Ec. 6.2). La corriente eléctrica es un conjunto de cargas en movimiento con una misma dirección en un conductor, es decir que si ponemos un conductor con corriente en un campo magnético éste sufre una fuerza ya que los electrones no pueden salirse del conductor.

De la Ec. (6.2) tenemos la fuerza que se ejerce para un portador de carga, para N portadores de carga en el conductor obtenemos que la fuerza es:

$$\vec{F} = N q \vec{v} \times \vec{B} \quad (6.4)$$

para facilitar el análisis se supone que el campo magnético es perpendicular a la velocidad de los portadores de carga, entonces:

$$F = N q v B \quad (6.5)$$

de la Ec. (4.3) se tiene que la relación entre la corriente ($I = i$) y el número de portadores de carga por unidad de volumen que es igual a:

$$i = n q v A$$

que se puede escribir como:

$$i = \left(\frac{N}{AL} \right) A q v$$

o bien:

$$i L = N q v$$

sustituyendo en la Ec. (6.11) se obtiene que:

$$F = i L B \quad (6.6)$$

En forma vectorial se representa por:

$$\vec{F} = i \vec{L} \times \vec{B} \quad (6.7)$$

donde L nos indica la dirección de la corriente y es la longitud de alambre que está dentro del campo magnético.

Una forma más general de expresar la Ec. (6.13) es en forma diferencial que es muy útil para los casos de los cuales el alambre no es recto o que el campo magnético es variable, esto es:

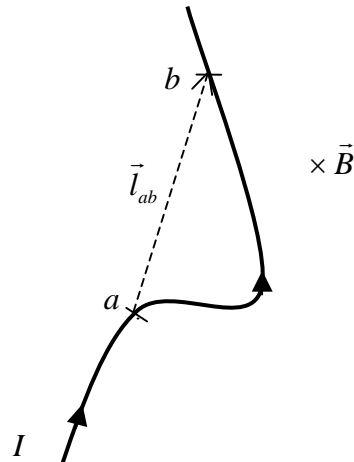
$$d \vec{F} = I d \vec{l} \times \vec{B} \quad (6.8)$$

y de aquí se puede calcular la fuerza total integrando sobre la longitud de alambre que está dentro del campo magnético.

Comentario:

Supongamos que se desea calcular la fuerza magnética sobre el conductor de la figura entre los puntos a y b . Si ocurre que el campo magnético \vec{B} y la corriente I , son constantes, entonces se puede escribir

$$\vec{F}_{ab} = I \int_a^b d\vec{l} \times \vec{B} \equiv I \left(\int_a^b d\vec{l} \right) \times \vec{B} = I(\vec{l}_{ab}) \times \vec{B} \quad (6.9)$$

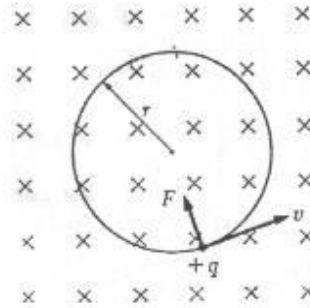


Cabe destacar que el método propuesto anteriormente, es de gran utilidad para determinar la fuerza magnética sobre segmentos curvos de los conductores con corriente.

6.7. Movimiento de partículas cargadas en un campo magnético.

Suponiendo que el campo magnético es uniforme y la velocidad es perpendicular al campo, la partícula experimenta una fuerza $F = qvB$ que cambia la dirección de la velocidad pero no varía su magnitud, y este describe un movimiento circular en un plano, como se muestra en la figura siguiente, para que la partícula describa la trayectoria circular es necesario que la fuerza sea centrípeta, de acuerdo a la segunda ley de Newton se tiene que:

$$F = m \frac{v^2}{r} \quad (6.10)$$



que es igual a la fuerza que obtiene en la Ec. (6.2) y sustituyendo en la Ec. (6.10), se tiene que:

$$qvB = m \frac{v^2}{r}$$

o bien:

$$r = \frac{mv}{qB} \tag{6.11}$$

donde r es el radio de la trayectoria circular que describe la partícula. De la relación $v = \omega r$ sustituyéndola en la Ec. (6.11) encontramos la velocidad angular ω , esto es:

$$\omega = \frac{qB}{m} \tag{6.12}$$

en la anterior observamos que la velocidad angular depende de la relación q/m que son características propias de la partícula y de la intensidad del campo magnético.

En la siguiente figura se esquematizan los componentes principales del ciclotrón, que es una cavidad cilíndrica dividida en dos mitades que reciben el nombre de “De”, cada una por su forma. Las Des se colocan en un campo magnético uniforme paralelo a su eje, y ambas están aisladas eléctricamente entre sí y conectadas a una fuente de voltaje oscilante.

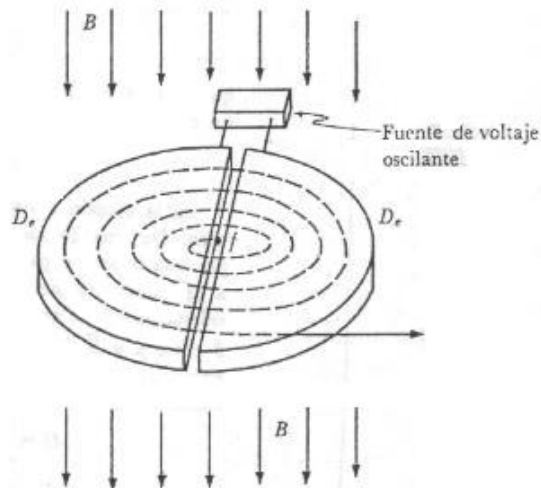


Fig (*) Componentes principales del ciclotrón.

Problemas resueltos

Problema 6.1

En un campo magnético uniforme, $\vec{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$ [T], es disparado un electrón con una velocidad $\vec{v} = 2 \times 10^8 \hat{k}$ [m/s]. Calcule la fuerza en magnitud y dirección que experimenta el electrón. $e = 1.6 \times 10^{-19}$ [C].

Solución:

De la ecuación 6.2 tenemos que:

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Sustituyendo datos:

$$\vec{F}_M = -(2\hat{k}) \times (2\hat{i} + 4\hat{j})(10^8)(1.6 \times 10^{-19})$$

Obteniendo:

$$\vec{F}_M = -1.6 \times 10^{-11} (-8\hat{i} + 4\hat{j})$$

La magnitud de \vec{F}_M es:

$$|\vec{F}_M| = 14.24 \times 10^{-11}$$

Y en notación vectorial:

$$\vec{F}_M = 12.8 \times 10^{-11} \hat{i} - 6.4 \times 10^{-11} \hat{j} \text{ [N]}.$$

Problema 6.2

Para el caso de una partícula cargada que se mueve en un campo magnético uniforme constante, aplicado en la dirección del eje z. Determine:

- Cada una de las componentes de la velocidad v_x , v_y y v_z .
- Las posiciones, $y(t)$ y $z(t)$.
- La ecuación de la trayectoria.

Solución:

- De la segunda ley de Newton y de la fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada, se puede escribir

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

En componentes

$$m \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right) = q \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B_{0z} \end{vmatrix}$$

De donde se tiene que

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega v_y \quad (\text{componente } x) \quad (*)$$

con
$$\omega = \frac{qB_{0z}}{m}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x \quad (\text{componente } y) \quad (**)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \quad (\text{componente } z)$$

Multiplicando por i la componente y (**), luego sumando la componente x (*) se tiene

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y)$$

de donde se encuentra

$$(v_x + iv_y) = ae^{-i\omega t}$$

Eligiendo adecuadamente la constante $a = v_{0,xy} e^{-i\alpha}$ se obtiene

$$(v_x + iv_y) = v_{0,xy} e^{-i(\omega t + \alpha)}$$

separando partes real e imaginaria se encuentra

$$v_x = v_{0,xy} \cos(\omega t + \alpha)$$

$$v_y = -v_{0,xy} \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

De donde se encuentra el valor de la constante $v_{0,xy} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, que corresponde al valor de la velocidad (módulo) de la partícula en el plano XY.

La componente z de la velocidad se obtiene de $\frac{dv_z}{dt} = 0$, de donde se encuentra que

$$v_z = v_{0z} = Cte$$

Por otro lado, integrando las ecuaciones que corresponde a las componentes de la velocidad se obtiene.

$$x(t) = x_0 + R \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$y(t) = y_0 + R \cos(\omega t + \alpha) \quad ; \quad R = v_{0,xy} / \omega$$

$$z(t) = z_0 + v_{0z} t$$

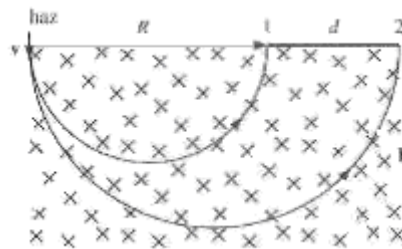
- c) Las ecuaciones anteriores muestran que la partícula cargada se mueve a lo largo de una hélice, cuyo eje está dirigido en el sentido del campo magnético, con un radio dado por $R = v_{0,xy} / \omega$.

Si $v_{0,z} = 0$, entonces el movimiento de la partícula es en el plano XY (perpendicular al campo magnético), y describe una órbita circular.

Problema 6.3

Un estrecho haz de protones de diferentes velocidades penetra en un campo magnético uniforme, de módulo B , que es perpendicular al plano del haz. ¿Qué velocidades deben tener los protones para que produzcan impacto en la lámina de longitud d , colocada a una distancia R de la entrada del haz, como se indica en la figura? Aplicación numérica:

$$B = 0,1 [T], \quad R = 10 [\text{cm}], \quad d = 2 [\text{cm}], \quad e/m_p = 9,58 \cdot 10^7 [\text{C/k}].$$



Solución

Al entrar los protones en el campo magnético experimentan una fuerza $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ que es, en cada instante, perpendicular a \vec{v} y a \vec{B} , por lo que los protones describen arcos de circunferencia de radio r , de modo que se verifica

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

luego

$$v = \frac{qBr}{m}$$

Para que se produzca el impacto en el punto 1 la velocidad de los protones deberá ser

$$v_1 = \frac{qB}{m} \frac{R}{2}$$

y para que se produzca el impacto en el punto 2, la velocidad de los protones deberá ser

$$v_2 = \frac{qB}{m} \frac{(R + d)}{2}$$

Aplicación numérica

$$v_1 = \frac{9,58}{2} 10^7 [\text{C/k}] \cdot 0,1 [\text{T}] \cdot 10^{-1} [\text{m}] = 4,97 \cdot 10^5 [\text{m/s}]$$

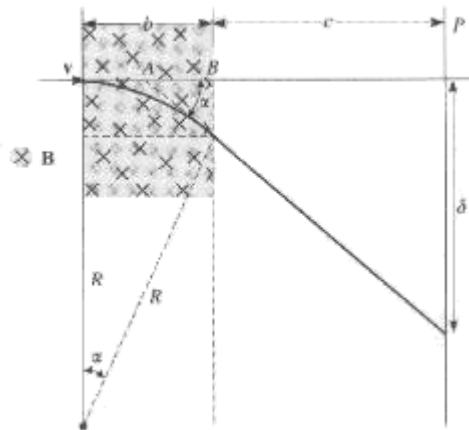
$$v_2 = \frac{9,58}{2} 10^7 [\text{C/k}] 0,1 [\text{T}] 1,2 \cdot 10^{-1} [\text{m}] = 5,75 \cdot 10^5 [\text{m/s}]$$

Los protones con velocidades comprendidas entre v_1 y v_2 producirán impactos en la lámina.

Problema 6.4

Se coloca un tubo de rayos catódicos entre las piezas de un electroimán, de modo que el campo magnético B , que es uniforme a lo largo de una longitud b del haz y nulo fuera de esta longitud, sea perpendicular al haz catódico. Si c es la distancia entre el borde del campo magnético y la pantalla fluorescente del tubo, V_0 la diferencia de potencial aceleradora de los electrones y e/m la carga específica del electrón:

- a) Calcule la desviación δ del impacto de los electrones en la pantalla.



- b) Simplifique la expresión obtenida en el caso en que b sea mucho menor que el radio de la trayectoria circular de los electrones en el campo magnético.

Solución

- b) Los electrones acelerados por el potencial V_0 adquieren una energía cinética

$$\frac{1}{2}m v^2 = e V_0$$

Al entrar en el campo magnético con la velocidad v experimentan una fuerza perpendicular a v y a B ; esta fuerza da lugar a una trayectoria circular de radio R de los electrones mientras están dentro del campo B

$$e v B = \frac{m v^2}{R} \quad R = \frac{m v}{e B} = \sqrt{\frac{2 V_0}{(e/m) B^2}} \quad (1)$$

De la geometría del problema se tiene

$$\delta = (c + \overline{AB}) \tan \alpha$$

$$\overline{AB} = \frac{R(1 - \cos \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{R - \sqrt{R^2 - b^2}}{b / \sqrt{R^2 - b^2}}$$

$$\begin{aligned} \delta &= \left(c + \frac{R - \sqrt{R^2 - b^2}}{b} \sqrt{R^2 - b^2} \right) \frac{b}{\sqrt{R^2 - b^2}} = \\ &= \left(\frac{cb}{\sqrt{R^2 - b^2}} + R - \sqrt{R^2 - b^2} \right) \end{aligned}$$

Sustituyendo R por su valor (1)

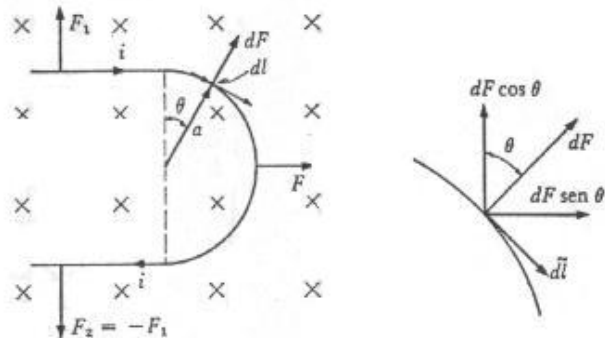
$$\delta = \frac{cb}{\sqrt{\frac{2V_0}{(e/m)B^2} - b^2}} + \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2V_0}{(e/m)}} - \sqrt{\frac{2V_0}{(e/m)B^2} - b^2}$$

- c) Si $b \ll R$

$$\delta = \frac{cb}{R} + R - R = cb B \sqrt{\frac{e/m}{2V_0}}$$

Problema 6.5

Un alambre de la forma que se muestra en la Fig. 6.8 lleva una corriente de 2 [A]. Calcule la fuerza magnética resultante que obra sobre el alambre si el campo magnético B es de 100 [T] y $a = 0.1$ [m].



Solución:

La fuerza magnética sobre un conductor con $I = i$, está dada por

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}$$

En la figura anterior vemos que la fuerza de la parte superior del alambre es igual a la fuerza que actúa en la parte inferior. El cálculo de la fuerza en la parte semicircular se obtiene de la integral sobre $dF \text{ sen } \theta$ ya que las componentes de $dF \text{ cos } \theta$ es anulada por la parte simétrica en el semicírculo del alambre, la fuerza resultante se obtiene integrando:

$$F = \int dF \text{ sen } \theta = \int (i B dl \text{ sen } 90^\circ) \text{ sen } \theta$$

ya que $d\vec{l} \perp \vec{B}$, como $dl = a d\theta$ entonces:

$$F = \int_0^\pi i B a \text{ sen } \theta d\theta$$

Integrando:

$$F = -iBa [\cos \theta]_0^\pi$$

Obteniendo la fuerza resultante:

$$F = 2iaB$$

en la dirección que se muestra en la Fig.

Sustituyendo datos obtenemos su magnitud $F = 40[N]$

Problema 6.6

Resuelva el problema anterior, utilizando directamente la expresión

$$\vec{F}_{ab} = I \int_a^b d\vec{l} \times \vec{B} \equiv I \left(\int_a^b d\vec{l} \right) \times \vec{B}$$

Solución

Dado que el campo magnético \vec{B} y la corriente I son constantes, entonces se puede escribir

$$\vec{F}_{ab} = I \int_a^b d\vec{l} \times \vec{B} \equiv I \left(\int_a^b d\vec{l} \right) \times \vec{B} = I(\vec{l}_{ab}) \times \vec{B}$$

Para el segmento semicircular $\vec{l}_{ab} = \vec{l}_{semicir.} = 2a(-\hat{j})$, $\vec{B} = B(-\hat{k})$

$$\vec{F}_{semicirc} = I2aB(-\hat{j}) \times (-\hat{k}) = 2IaB\hat{i}$$

Para el segmento superior e inferior se tiene que:

$$\vec{l}_{sup} = l_{sup}\hat{i} \quad ; \quad \vec{l}_{inf} = l_{inf}(-\hat{i})$$

luego la fuerza sobre estos segmentos es

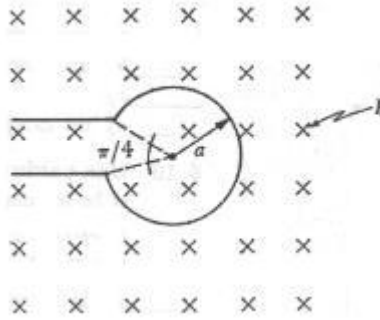
$$\vec{F}_{sup} + \vec{F}_{inf} = I(\vec{l}_{sup}) \times \vec{B} + I(\vec{l}_{inf}) \times \vec{B} = Il_{sup}B(\hat{i}) \times (-\hat{k}) + Il_{inf}B(-\hat{i}) \times (-\hat{k})$$

$$\vec{F}_{\text{sup}} + \vec{F}_{\text{inf}} = I l_{\text{sup}} B \hat{j} + I l_{\text{inf}} B (-\hat{j}) = IB(l_{\text{sup}} - l_{\text{inf}}) \hat{j}$$

Si ocurre que $l_{\text{sup}} = l_{\text{inf}}$. Entonces $\vec{F}_{\text{sup}} + \vec{F}_{\text{inf}} = 0$

Problema 6.7

Un alambre de la forma que se muestra en la siguiente figura; pasa una corriente por el de 12 [A], calcule la fuerza magnética que experimenta el alambre al colocarlo en un campo magnético de 20 [T]. Considere el radio $a = 0.2$ [m]



Solución

Dado que el campo magnético y la corriente, son constantes, entonces se puede escribir

$$\vec{F}_{ab} = I \int_a^b d\vec{l} \times \vec{B} \equiv I \left(\int_a^b d\vec{l} \right) \times \vec{B} = I(\vec{l}_{ab}) \times \vec{B}$$

Del problema anterior, se observa que la fuerza sobre los segmentos horizontales se anula.

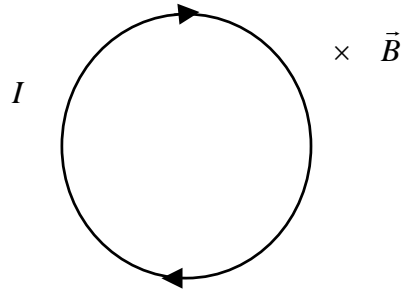
Luego, para el segmento curvo, de la fig. se tiene que $\vec{l}_{ab} = \vec{l}_{\text{semicir.}} = 2a \text{sen}(\pi/8)(-\hat{j})$,

$$\vec{B} = B(-\hat{k})$$

$$\vec{F}_{\text{semicirc}} = 2IaB \text{sen}(\pi/8)(-\hat{j}) \times (-\hat{k}) = 36.74[N] \hat{i}$$

Problema 6. 8

Determine la fuerza magnética sobre un espira circular de la figura .



Solución:

Dado que el campo magnético y la corriente, son constantes, entonces:

$$\vec{F}_{ab} = I \int_a^b d\vec{l} \times \vec{B} \equiv I \left(\int_a^b d\vec{l} \right) \times \vec{B} = I(\vec{l}_{ab}) \times \vec{B}$$

Por tratarse de un conductor cerrado, se tiene que: $\vec{l}_{ab} \equiv \vec{l}_{aa} = 0$ Entonces

$$\vec{F} = 0$$

Problema 6.9

Se desea diseñar un ciclotrón como el que se muestra en la Fig.(*) con un radio de la “De” de 1 metro y que el valor del campo magnético sea de 0.65 tesla, a) ¿Cuál es el valor de la frecuencia de oscilación?, b) ¿Cuál es la energía del protón al salir del ciclotrón?

Solución:

a) De la Ec. (6.12) obtenemos la frecuencia ν del protón que es la misma frecuencia ν_0 de la fuente de voltaje oscilante, que es el principio de operación del ciclotrón.

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}$$

sustituyendo valores:

$$\nu = \frac{(1.6 \times 10^{-19} [C])(0.65 [T])}{(2)(3.14)(1.67 \times 10^{-27} [k])} = 1 \times 10^7 [Hz]$$

b) De la Ec. (6.11) se tiene que la velocidad depende del radio de la partícula que en este caso es el radio de las “Des”, despejando la velocidad y sustituyendo en la ecuación de la energía cinética tenemos:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{qBR}{m}\right)^2$$

sustituyendo valores:

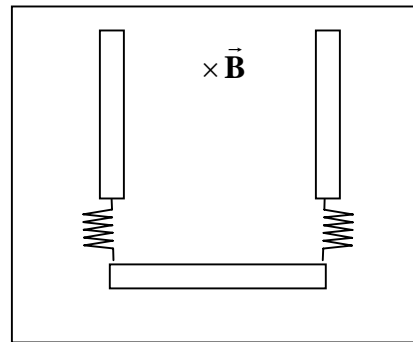
$$K = \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ coul})^2 (0.65 \text{ tesla})^2 (1m)^2}{2 (1.67 \times 10^{-27} \text{ Kg})} = 3.1 \times 10^{-12} [J].$$

Convirtiendo a MeV:

$$K = 3.1 \times 10^{-12} \left(\frac{1}{1.6 \times 10^{-13}} \right) = 19.4 [M eV].$$

Problema 6.10

Un alambre que tiene una densidad lineal de masa de $\lambda = 0.06[\text{kg/m}]$, está suspendido por un par de puntas flexibles, dentro de un campo magnético de $440[\text{mT}]$. Determine la magnitud y dirección de la corriente en el alambre para que la tensión en las puntas sea cero



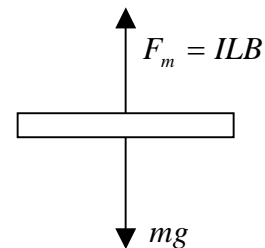
Solución:

De diagrama del cuerpo libre se tiene que

$$F_m = ILB = mg$$

Luego

$$I = \frac{mg}{LB} = \frac{(m/L)g}{B}$$



Reemplazando los valores se encuentra $I = 1.34[A]$

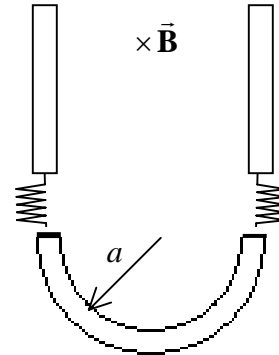
Dado que $\vec{F}_m = I\vec{L} \times \vec{B}$ y como $\vec{B} = B(-\hat{k})$ y $\vec{F}_m = F_m \hat{j}$, entonces se debe cumplir que

$$IL\hat{u} \times (-B\hat{k}) = F_m \hat{j} \Rightarrow \hat{u} = \hat{i}$$

Dado que el sentido de la corriente es la del vector $\vec{L} = L\hat{u}$, se tiene que la dirección de la corriente es a lo largo del eje x

Problema 6.11

Un alambre cuya masa es m , está suspendido mediante unos alambres flexibles en un campo magnético \vec{B} que apunta hacia fuera del plano del papel. Determine: ¿Cuál es la magnitud y dirección de la corriente necesaria para eliminar la tensión de los alambres flexibles.



Solución:

La fuerza magnética sobre el alambre semicircular, está dada por

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Dado que el campo es constante y perpendicular con $d\vec{l}$, se tiene que:

$$\vec{F} = I \left(\int_0^{2a} d\vec{l} \right) \times \vec{B} = I(2a)B \hat{j}$$

Entonces el módulo de la fuerza magnética es

$$F = I(2a)B$$

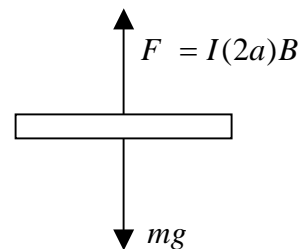
Notamos que el alambre semicircular (dentro del campo magnético) se comporta como un alambre recto de longitud $2a$, tal como se muestra en la siguiente figura.

Del diagrama del cuerpo libre se tiene que

$$I(2a)B = mg$$

Luego

$$I = \frac{mg}{2aB}$$



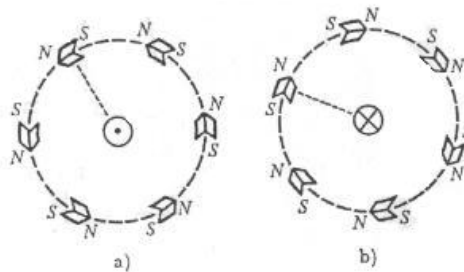
Dado que $\vec{B} = B(-\hat{k})$ y $\vec{F} = F\hat{j}$, entonces se debe cumplir que la corriente circula de izquierda a derecha.

CAPÍTULO VII

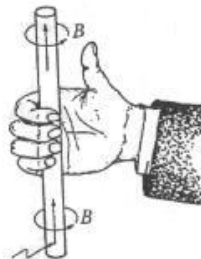
LEY DE AMPERE Y LEY DE BIOT-SAVART

7.1. Ley de Ampere

Oersted en 1820 fue quien descubrió experimentalmente, que una corriente que circula en un alambre produce efectos magnéticos sobre una brújula en su alrededor. Al realizar este experimento se observa que al colocar varias brújulas en los alrededores del alambre todas se orientan de tal forma que la dirección de las agujas de las brújulas forman ángulos rectos con la dirección de la distancia tomada del alambre a cada una de las brújulas, al colocar todas las brújulas a la misma distancia, las agujas nos dan la dirección tangencial del círculo que forman como se muestra en la Fig. a).



La dirección de la corriente que sale del plano de la hoja que se representa simbólicamente por un punto en el alambre (\bullet) y cuando entra por una cruz (\otimes); si cambiamos el sentido de la corriente entonces las agujas de los imanes dan un giro de 180° lo que significa que el campo magnético que las orienta cambió a 180° también en su dirección, Fig. b). De una forma práctica se adopta la regla de la mano derecha indicando con el pulgar la dirección de la corriente y la curvatura de los dedos alrededor del alambre indica la dirección del campo magnético como se muestra en la Fig. .



En este experimento (primera Fig.) se observa que al alejarnos del alambre con corriente el campo disminuye y al acercamos aumenta, mientras que al disminuir la intensidad de la corriente el campo magnético B , es menor, y al aumentarla, el campo magnético B es mayor; de donde se concluye que B es directamente proporcional a la corriente que circula por el alambre e inversamente a la distancia entre el alambre y el punto donde se desea determinar. De las anteriores observaciones se encuentra que la relación entre el campo magnético y la corriente en el conductor que se conoce como Ley de Ampere, y esta dada por la expresión:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{7.1}$$

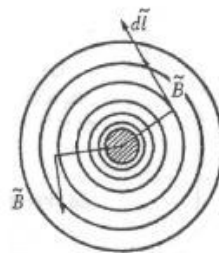
donde μ_0 es la constante de permeabilidad en el vacío y tiene un valor de:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left[\frac{T m}{A} \right]$$

En la Ec. (7.1) I , es la corriente que pasa por el conductor y r es la distancia radial del centro del conductor al punto donde se desea calcular el campo, como se muestra en la Fig.. Dada la dependencia radial de B y debido a que r es constante sobre el círculo; la Ec. (7.1) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \tag{7.2}$$

En la Fig. se observa que para cualquier punto de la trayectoria, la dirección de \vec{B} es la misma que para $d\vec{l}$ por lo tanto, $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl$ y si evaluamos la integral de la Ec. (7.2) y despejamos el campo obtenemos la Ec. (7.1). La corriente I es la corriente encerrada por la integral de línea. De aquí que cuando la corriente encerrada es cero, entonces el campo es cero en esa región.



La Ec. (7.2) es válida en general para cualquier arreglo de conductores con corriente, para cualquier trayectoria cerrada de integración y para cualquier campo B , siempre y cuando éste no esté variando con el tiempo. Al tratar de evaluar la integral en la Ec. 7.2 es donde surge el problema; ya que se puede evaluar sin dificultad para problemas que tienen simetría, de aquí que su aplicación sea muy limitada.

La Ec. 7.2 se puede escribir en función de la densidad de corriente de acuerdo a la Ec. (4.4).:

$$I = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = \text{corriente encerrada.}$$

donde ds es el diferencial de superficie; por lo tanto, la Ec. (7.2) se puede escribir como:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (7.3)$$

donde la integral de superficie de la densidad de corriente corresponde al área encerrada por la integral de línea cerrada.

7.2. Campo de un conductor recto y largo, con corriente

Para calcular el campo magnético de un alambre recto y largo que lleva una corriente i lo podemos obtener con la Ec. (7.2). Si deseamos calcular el campo para puntos dentro del conductor es necesario utilizar la Ec. (7.3). Las líneas de inducción son círculos con centros en el alambre, como se muestra en la Fig. 7.3. De aquí que el campo magnético para $r > a$ donde a es radio del alambre es:

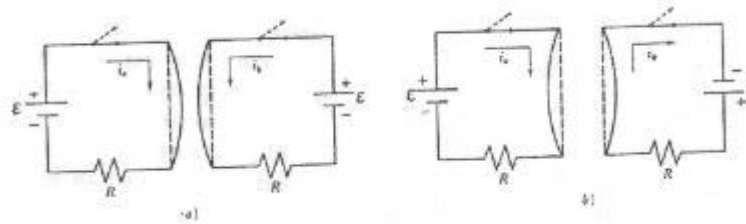
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (7.4)$$

que se obtiene a partir de la Ec. (7.2.)

7.3. Fuerza entre dos conductores paralelos

En la sección 6.5 veíamos que cuando un alambre transportaba una corriente y se encontraba en una región del espacio donde hay un campo magnético experimentaba una fuerza, siempre y cuando la dirección del campo no fuera paralela a la longitud del alambre; es decir, que si

tenemos dos alambres rectos y largos paralelos que transportan corriente, estos se atraen o se repelen mutuamente dependiendo de la dirección de la corriente. En la Fig. a), se muestran dos circuitos, cuando los interruptores se cierran los alambres experimentan una fuerza de atracción. Sí cambiamos la dirección de una fuente como se muestra en la Fig. b), al cerrar los interruptores observamos que los alambres experimentan una fuerza de repulsión.



Para calcular la fuerza de atracción entre los alambres de Fig. anterior a), se puede hacer utilizando las Ec. (6.13) y (7.2); se llama un alambre “a” que lleva una corriente i_a y otro alambre “b” que lleva una corriente i_b y a la distancia entre ellos d , además se debe considerar que los radios de los alambres son muy pequeños.

Para calcular el campo magnético del alambre b en el alambre a , se utiliza Ley de Ampere de modo que:

$$B_a = \frac{\mu_0 i_b}{2\pi d}$$

De la Ec. (6.13) tenemos que la fuerza de atracción que experimenta el alambre a es:

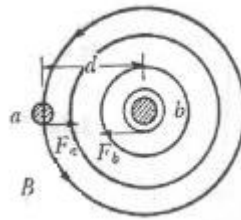
$$\vec{F}_a = i_a \times \vec{B}_a$$

como el campo magnético es perpendicular a \vec{l} entonces $|\vec{l} \times \vec{B}_a| = l B_a$, sustituyendo el valor de B_a en la Ec. (6.13) obtenemos que la fuerza por unidad de longitud en el alambre es:

$$F_a / l = \frac{\mu_0 i_a i_b}{2\pi d} \tag{7.5}$$

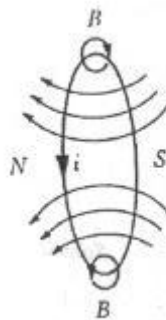
que es exactamente igual a la fuerza de atracción que experimenta el alambre b . Para el caso en que las corrientes fueran en sentido contrario en los alambres como se ilustra en la

Fig. anterior b), entonces los alambres experimentan una fuerza igual en magnitud a la de la Ec. (7.5), pero en sentido contrario, es decir, de repulsión.

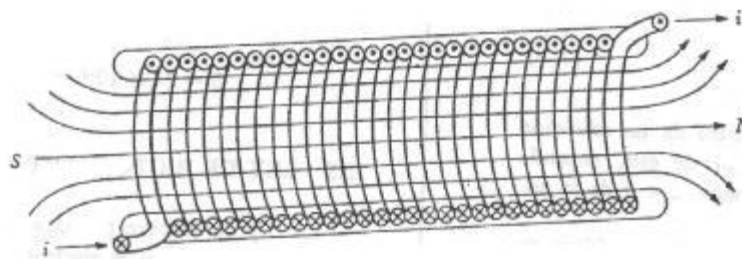


7.4. Campo de un Solenoide

Si hacemos pasar corriente por una espira ésta genera un campo magnético como se muestra en la Fig.

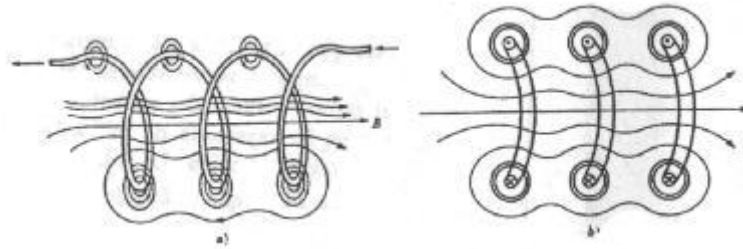


Si se tiene varias espiras, conectadas entre sí, de un mismo radio y se colocan como se muestran en la siguiente figura, se forma una bobina que tiene una longitud grande comparada con el radio de las espiras que la forman, este arreglo se conoce como solenoide (ver figura).

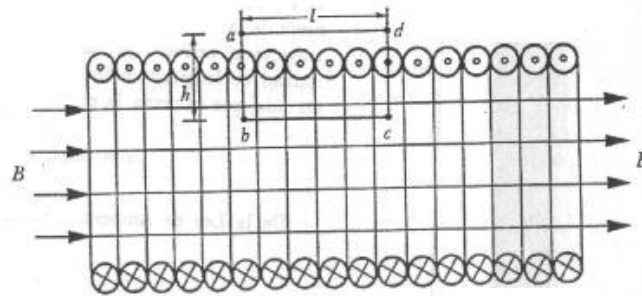


Solenoide (corte longitudinal).

Al pasar una corriente por el solenoide se genera un campo magnético uniforme excepto en los bordes, donde el campo empieza a abrirse. Para analizar por que el campo es uniforme dentro del solenoide y como es casi cero fuera de él, se puede hacer tornando unas espiras separadas por una distancia pequeña como se muestra en la Fig.



A medida que juntan las espiras el campo magnético dentro se hará más uniforme e intenso mientras que en el exterior tenderá a disminuir.



Para determinar el campo magnético en el solenoide se asume que el campo magnético es uniforme y que los efectos en los bordes (las terminales del solenoide) no son considerados.

Aplicando la Ley de Ampere:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

a una trayectoria rectangular cerrada $a b c d$ de lados l y h como se ilustra en la Fig. anterior, entonces:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

ya que la integral cerrada de línea equivale a la suma de la integral de cada uno de los segmentos que forman la trayectoria, rectangular $a b c d$.

Al analizar cada una de las integrales del segundo miembro, se observa que la primera y la tercera integral son cero, ya que la región donde hay campo el vector diferencial de longitud forma un ángulo de 90° con el campo y fuera del solenoide no existe campo para la cuarta integral o sea en la trayectoria de “d” a “a” el campo vale cero y por consiguiente la integral también. La integral de la trayectoria “b c” no es cero y es igual a $B l$ ya que el ángulo entre $d\vec{l}$ y \vec{B} es 0° , por lo tanto:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} = B l$$

la corriente I que se encierra en la trayectoria $a b c d$, es igual a la suma de la corriente de cada espira o vuelta que se encuentra dentro de la trayectoria cerrada. Si se define que n sea el número de vueltas por unidad de longitud entonces, $n l$ es el número de vueltas en la trayectoria cerrada, por lo tanto, la corriente encerrada I es igual a:

$$I_{enc} = (n l) I_0 = \text{corriente encerrada.}$$

De la Ley de Ampere Ec. (7.2) se tiene que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B l = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 n l I_0$$

de donde

$$B = \mu_0 n I_0 \tag{7.6}$$

En la Ec. (7.6) se ve que el campo magnético dentro de un solenoide ideal no depende de su diámetro ni de la longitud de éste, depende únicamente del número de vueltas por unidad de longitud n y de la corriente que pasa por el solenoide.

La Ec. (7.6) se puede usar para calcular campos magnéticos en puntos internos cerca del centro, para solenoides reales con una aproximación muy buena. En el cálculo del campo magnético para los bordes de un solenoide real, la Ec. (7.6) no sirve.

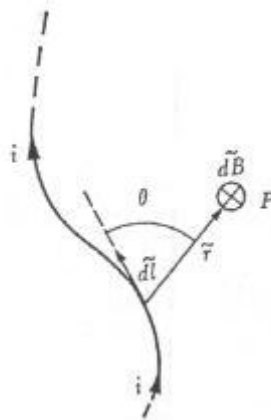
7.5. Ley de Biot- Savart

La Ley de Ampere presenta una dificultad en magnetismo muy similar a la Ley de Gauss en electrostática, que es la evaluación de la integral, y por consiguiente sólo para los casos en que existe suficiente simetría para evaluar la integral se puede utilizar. Esto no significa que la Ley de Ampere, no se pueda aplicar en todos los casos, sino que simplemente es muy difícil evaluar la integral. En algunos casos en electrostática veíamos que la Ley de Gauss se puede usar para que de una forma simple y directa calcular el campo eléctrico, por ejemplo una varilla larga con una distribución de carga uniforme, pero en el caso de un anillo con una distribución de carga uniforme la única forma de encontrar el campo para puntos sobre el eje, era mediante una integración directa a partir de la Ley de Coulomb con diferenciales de carga.

En forma similar se establece la Ley de Biot-Savart en magnetismo para calcular el campo magnético por integración directa para una distribución de corriente con respecto a un punto considerado, y que se escribe como:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \sin\theta}{r^2} \quad (7.7)$$

donde cada dl es un diferencial de longitud del conductor con corriente i aportando un dB y r es el vector distancia entre el punto P , donde se desea determinar el campo magnético, y el diferencial de longitud $d\vec{l}$; θ es el ángulo entre el vector distancia \vec{r} y la dirección de $d\vec{l}$, como se muestra en la Fig. La dirección del campo magnético en P está dada por $d\vec{l} \times \vec{r}$ que concuerda con la regla de la mano derecha.



La Ley de Biot-Savart, la podemos escribir en forma vectorial de la siguiente forma:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (7.8)$$

Problemas resueltos

Problema 7.1

Escriba la Ley de Ampere en forma diferencial

Solución

La ley de Ampere escrita en forma integral tiene la forma

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Dado que la corriente se puede escribir como $I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s}$, sustituyendo en la expresión anterior, se tiene

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} \equiv \iint (\mu_0 \vec{J}) \cdot d\vec{s}$$

Utilizando el teorema de Stokes

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

Comparando las dos últimas ecuaciones, se encuentra

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Como $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, también se puede escribir

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$$

La expresión anterior, se conoce con el nombre de forma diferencial de la Ley de Ampere, y forma parte (sólo de una parte) de una de las ecuaciones de Maxwell, será él quien escribirá una ecuación general (completa) al respecto.

Problema 7.2

Calcule el campo magnético para puntos dentro de un ($a < r < b$) cable coaxial, si el conductor central tiene un radio a y el conductor exterior tiene un radio interior b y radio exterior c , como se muestra en la Fig.. Por los conductores pasan corrientes iguales pero de sentidos contrarios.

Solución:

De acuerdo a la Ley de Ampere la única corriente que produce campo magnético para $a < r < b$ es la del conductor interno ya que es la corriente encerrada, de la Ec. 7.2, tenemos que:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

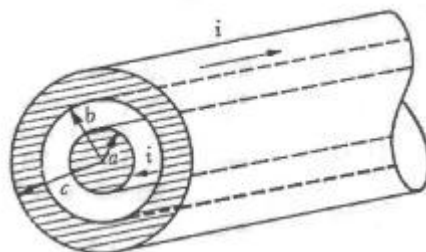
de donde:

$$B 2 \pi r = \mu_0 i$$

obteniendo:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2 \pi r}$$

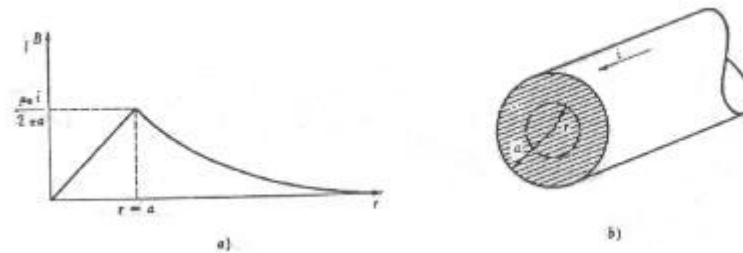
¿Qué valor cree usted que tiene el campo para puntos fuera del cable coaxial?



Cable coaxial.

Problema 7.3

Un conductor recto y largo de radio a lleva una corriente i uniformemente distribuida. a) Calcule el campo magnético, para puntos dentro del alambre. (Vea Fig. b) Grafique B vs r para $a < r < \infty$.



Solución:

Primero se obtiene la densidad de corriente i de la Ec. (4.3), esto es:

$$J = \frac{i}{A} = \frac{i}{\pi a^2}$$

de la Ec. (7.3) se tiene que:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

evaluando para círculos con $r < a$ tenemos:

$$B 2\pi r = \mu_0 J \pi r^2$$

despejando B y sustituyendo el valor de J :

$$B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi a^2}$$

en la superficie del alambre esta ecuación se reduce a la misma ecuación que se obtiene a partir de la Ec. (7.2)

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}$$

b) Gráfico del campo B en función de r .

En esta gráfico observamos que el campo máximo es en $r = a$ y que el campo es cero para $r = 0$ y el campo tiende a cero cuando $r \rightarrow \infty$.

De la Ec. (7.4) obtenemos

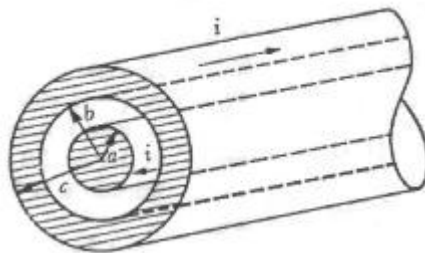
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

para $r > a$.

Problema 7.4

Considere un cable coaxial, de tal forma que tal que el conductor central tiene un radio a y el conductor exterior tiene un radio interior b y radio exterior c , como se muestra en la Fig. Si por los conductores circulan corrientes iguales pero de sentidos opuestos. determine el campo magnético en todas las regiones, esto es:

- a) $B(r < a)$; b) $B(a < r < b)$; c) $B(b < r < c)$; d) $B(r > b)$



Cable coaxial.

Solución:

- a) El valor del campo en esta región, está dado por el resultado obtenido en le problema anterior (ver problema anterior)

$$B(r < a) = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi a^2} \right) r$$

- b) En esta región se tiene que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

de donde:

$$B 2\pi r = \mu_0 i$$

luego:

$$B(a < r < b) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

c)
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$$

donde la corriente encerrada en este es $i_{enc} = i - \iint \vec{J} \cdot d\vec{s}$, entonces

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i - \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} \right)$$

dado que $\vec{B} \uparrow \uparrow d\vec{l}$ y $\vec{J} \uparrow \uparrow d\vec{s}$, se tiene que

$$\oint B dl = \mu_0 \left(i - \iint J ds \right)$$

como los módulos de B y J son constantes, se obtiene

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i - \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} \right)$$

$$B2\pi r = \mu_0 [i - J\pi(r^2 - b^2)] \quad \text{donde } J = \frac{i}{\pi(c^2 - b^2)}$$

Reemplazando, se encuentra

$$B(b < r < c) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \left[1 - \frac{(r^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)} \right]$$

d)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc} = \mu_0 (i - i) = 0$$

Dado que en esta región no hay corriente encerrada entonces el campo magnético es cero.

Luego

$$B(r > c) = 0$$

Problema 7.5

Un conductor recto, largo y de radio a , conduce una corriente I_0 , se ha diseñado de tal forma que la densidad de corriente dentro del conductor varía de acuerdo a la expresión

$$J = \left(\frac{3I_0}{2\pi a^3} \right) r. \text{ Determine:}$$

- a) El campo magnético para puntos dentro del conductor: $B(r < a)$
- b) El campo magnético para puntos fuera del conductor: $B(r > a)$
- c) Construya gráfico $B = B(r)$

Solución:

a) De la Ley de Ampere se tiene que:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

dado que $\vec{B} \uparrow \uparrow d\vec{l}$ y $\vec{J} \uparrow \uparrow d\vec{s}$, se puede escribir

$$\oint B dl = \mu_0 \iint J ds$$

Teniendo presente que $ds = r dr d\theta$ y sustituyendo el valor de J se obtiene

$$B 2\pi r = \mu_0 \int_0^r \int_0^{2\pi} \left(\frac{3I_0}{2\pi a^3} \right) r r dr d\theta$$

$$B(r < a) = \mu_0 \frac{3I_0}{4\pi^2 a^3 r} \int_0^r \int_0^{2\pi} r^2 dr d\theta$$

Integrando:

$$B(r < a) = \mu_0 \frac{3I_0}{4\pi^2 a^3 r} \frac{r^3}{3} 2\pi = \left(\frac{\mu_0 I_0}{2\pi a^3} \right) r^2$$

b) En esta caso la corriente encerrada es I_0 , además es fácil ver que

$$I_{enc} = \iint J ds = \int_0^a \int_0^{2\pi} \left(\frac{3I_0}{2\pi a^3} \right) r r dr d\theta$$

$$I_{enc} = \left(\frac{3I_0}{2\pi a^3} \right) \frac{a^3}{3} 2\pi = I_0$$

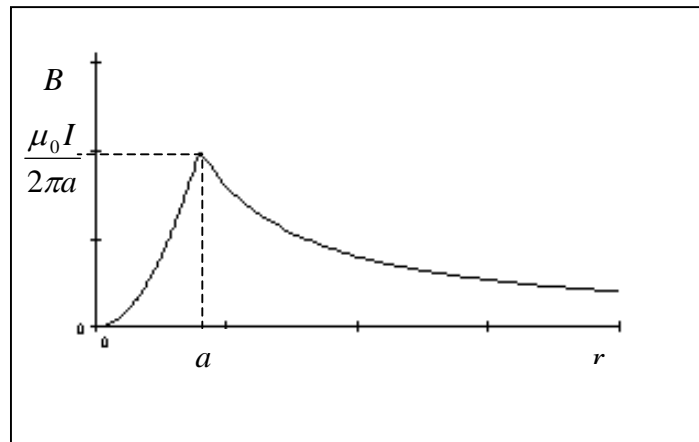
entonces

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_0$$

luego

$$B(r < a) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$$

c)



Problema 7.6

Demuestre que cuando un par de conductores paralelos de longitud infinita y separados un metro que llevan una corriente de un ampere cada uno en la misma dirección, experimentan una fuerza de atracción por unidad de longitud de $2 \times 10^{-7} [N/m.]$

Solución:

De la Ec. (7.5) tenemos que:

$$F/l = \frac{\mu_0 i_a i_b}{2\pi d}$$

como $i_a = i_b = i$ entonces:

$$F/l = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d}$$

sustituyendo datos tenemos que:

$$F/l = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ tesla} \cdot \text{m/amp}) (1 \text{ amp})^2}{2\pi (1 \text{ m})}$$

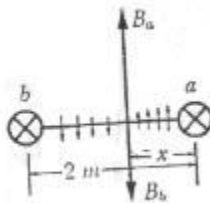
$$\frac{F}{l} = 2 \times 10^{-7} [\text{N/m}]$$

Problema 7.7

Determine el punto o puntos donde el campo magnético entre dos conductores *a* y *b*, separados una distancia de 2 [m] que llevan una corriente de 1 [A] y 4 [A] en la misma dirección respectivamente, es cero.

Solución:

En la Fig. se muestra esquemáticamente como el campo magnético resultante que disminuye hasta llegar a un punto en el cual es cero y después se invierte su dirección.



Para cualquier punto sobre el eje que une a los alambres el campo magnético resultante es la suma del campo de cada uno de los alambres, esto es:

$$\vec{B} = \vec{B}_a + \vec{B}_b$$

De la Ec. (7.2) el campo para el alambre *a* es:

$$B_a = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$$

para el alambre *b*:

$$B_b = \frac{\mu_0 i}{2\pi (d - x)}$$

Para que el campo magnético resultante sea cero en un punto sobre el eje es necesario que:

$$B_a = B_b$$

en magnitud y determinar el valor de x esto es:

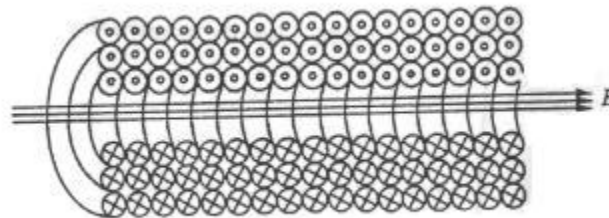
$$\frac{\mu_0 i_a}{2\pi x} = \frac{\mu_0 i_b}{2\pi (d-x)}$$

de donde:

$$x = \frac{d}{5} = \frac{2}{5} [m].$$

Problema 7.8

Un solenoide como el que se muestra en la Fig. tiene 0.60 m de largo, se diseñó con tres capas y cada capa tiene 500 vueltas y lleva una corriente de 2 amperes. Determine el campo magnético B en el centro del solenoide.



Solución:

De la Ec. (7.6) se tiene que:

$$B = \mu_0 n i_0$$

donde $n = \frac{N}{l}$ y N es el número de vueltas en el solenoide que es igual a 1500 vueltas y l la longitud del solenoide, entonces:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} i$$

Sustituyendo datos se obtiene:

$$B = \left(4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{tesla} \cdot \text{m}}{\text{ampere}} \right) \left(\frac{1500}{0.6 \text{ m}} \right) (2 \text{ ampere})$$

$$B = 2\pi \times 10^{-3} [T]$$

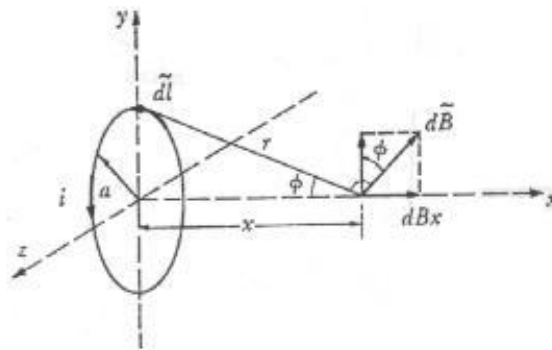
Problema 7.9

Calcule el campo magnético B para puntos sobre el eje axial de una espira con corriente i y radio a como se muestra en la Fig.

Solución:

De la Fig. 7.15 observamos que $d\vec{l}$ y \vec{r} son perpendiculares, por lo tanto la Ec. (7.7) se escribe así:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{r^2}$$



donde dB tiene la dirección que se muestra, pero solamente la componente dB_x contribuye al campo magnético resultante en p ya que la componente dB_y se anula por su componente simétrica y opuesta, así que:

$$B = \int dB_x = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{dl}{r^2} \text{sen}\phi$$

como $\text{sen}\phi = \frac{a}{r}$ y $r = (a^2 + x^2)^{1/2}$ de la Fig.

Sustituyendo se tiene:

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{a}{r^3} \int_0^{2\pi a} dl$$

evaluando:

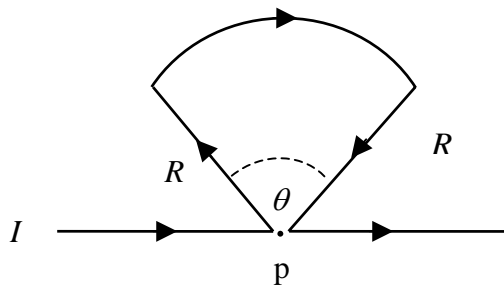
$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{a}{r^3} 2\pi a$$

simplificando y reemplazando r por su valor:

$$B = \frac{\mu_0 i a^2}{2 (a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Problema 7.10

Determine que el campo magnético en el punto p , producido por el conductor de la figura que transporta una corriente constante I , está dado por $B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \theta$



Solución

El campo en el punto p , está dado por el aporte de cada uno de los segmentos del conductor, esto es

$$B_p = (B_p)_{Seg. rectos} + (B_p)_{Seg. curvo}$$

Por otro lado, según la ley de Biot-Savart se puede escribir

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. rectos} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. curvo} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

De la figura se observa que para todos los segmento rectos se cumple que

$$(d\vec{l} \times \hat{r})_{Seg. rectos} = 0$$

luego en el punto p , solo aporta el campo producido por la corriente del segmento curvo

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. curvo} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Para este segmento curvo se cumple que

$$(d\vec{l} \times \hat{r})_{Seg. curvo} = dl \hat{u} = R d\theta \hat{u}$$

donde \hat{u} es un vector unitario que entra al plano de la página, además $r = R = Cte$, luego

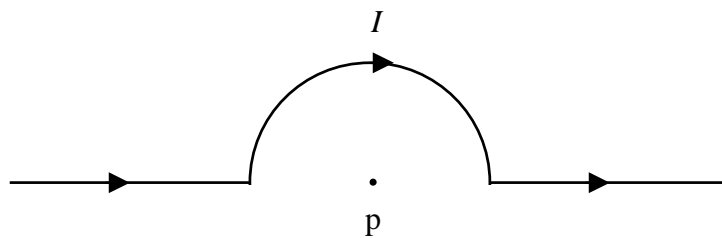
$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{u} \int_{Seg. curvo} \frac{R d\theta}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \theta \hat{u}$$

El módulo del campo es

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \theta \quad : \quad \forall \theta \text{ en radianes}$$

Problema 7.11

Determine el campo magnético en el punto p de la figura



Solución

Teniendo presente que los segmentos rectos no aportan al campo en el punto p , puesto que $(d\vec{l} \times \hat{r})_{Seg. rectos} = 0$, entonces se puede aplicar directamente la relación obtenida para segmentos circulares.

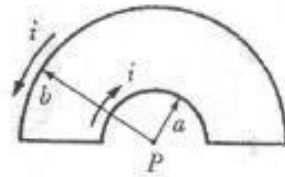
$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \theta$$

En este caso $\theta = \pi$, de donde se encuentra

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

Problema 7.12

Determine el campo magnético en el punto p, producido por el conductor de la figura



Solución

El campo en el punto p, está dado por el aporte de cada uno de los segmentos del conductor, esto es

$$B_p = (B_p)_{Seg. rectos} + (B_p)_{Seg. curvos}$$

Por otro lado, según la ley de Biot-Savart, para $i = I$, se puede escribir

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. rectos} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. curvos} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

De la figura notamos que para todos los segmento rectos se cumple que

$$(d\vec{l} \times \hat{r})_{Seg. rectos} = 0$$

Luego

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. curvos} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg(a)} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg(b)} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Aplicando la relación para segmento circulares, se puede escribir

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \theta_1 (-\hat{u}) + \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \theta_2 (\hat{u})$$

Donde \hat{u} es un vector unitario que sale del plano de la hoja, además de la figura se ve que $\theta_1 = \theta_2 = \pi$, luego

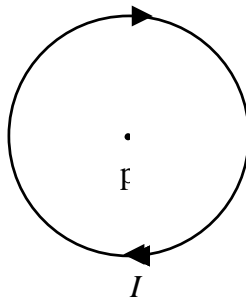
$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4a}(-\hat{u}) + \frac{\mu_0 I}{4b}(\hat{u}) = \frac{\mu_0 I}{4} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) (\hat{u})$$

También se puede escribir (para el módulo)

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

Problema 7.13

Calcule el campo magnético en el centro de una espira circular que transporta una corriente I



Solución

Teniendo presente que para segmentos circulares se puede aplicar directamente la relación

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \theta$$

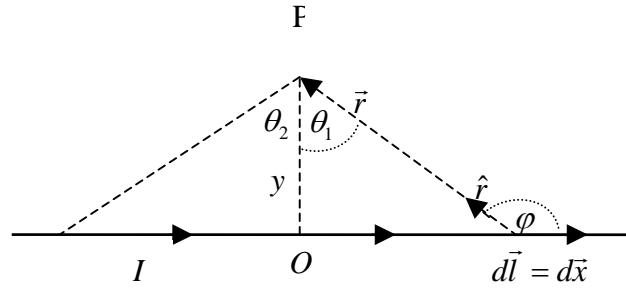
dado que para este caso $\theta = 2\pi$, se encuentra

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Problema 7.14

Demuestre que el campo magnético en el punto p, producido por la corriente que circula por los **segmentos rectos** correspondientes a los ángulos θ_1 y θ_2 está dado por:

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\text{sen } \theta_1 + \text{sen } \theta_2)$$



Solución

$$B_p = (B_p)_{\text{Lado derecho}} + (B_p)_{\text{Lado izquierdo}}$$

donde

$$(B_p)_{\text{Lado derecho}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Lado derecho}} \frac{|d\vec{l} \times \hat{r}|}{r^2}$$

De la figura se tiene que

$$|d\vec{l} \times \hat{r}| = dx \operatorname{sen} \varphi = dx \operatorname{sen}(\theta_1 + \pi/2) \equiv dx \cos \theta_1$$

luego

$$(B_p)_{\text{Lado derecho}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Lado derecho}} \frac{dx \cos \theta_1}{r^2}$$

También de la figura se obtiene

$$\frac{x}{y} = \tan \theta_1 \Rightarrow x = y \tan \theta_1 \Rightarrow dx = y \sec^2 \theta_1 d\theta_1; (y = \text{cte})$$

$$\cos \theta_1 = \frac{y}{r} \Rightarrow r^2 = \frac{y^2}{\cos^2 \theta_1} = y^2 \sec^2 \theta_1$$

Sustituyendo los valores de r^2 y de dx se encuentra

$$(B_p)_{\text{Lado derecho}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Lado derecho}} \frac{dx \cos \theta_1}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Lado derecho}} \frac{y \sec^2 \theta_1 d\theta_1 \cos \theta_1}{y^2 \sec^2 \theta_1}$$

$$(B_p)_{\text{Lado derecho}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} \int_0^{\theta_1} \cos \theta_1 d\theta_1$$

de donde se obtiene

$$(B_p)_{Lado\ derecho} = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} \text{sen } \theta_1$$

En forma análoga se puede encontrar que

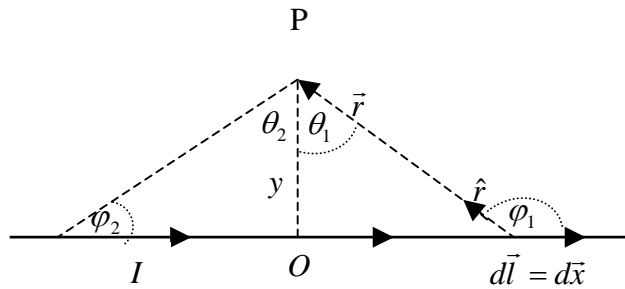
$$(B_p)_{Lado\ izquierdo} = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} \text{sen } \theta_2$$

$$B_p = (B_p)_{Lado\ derecho} + (B_p)_{Lado\ izquierdo} = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\text{sen } \theta_1 + \text{sen } \theta_2)$$

Problema 7.15

Demuestre que el campo magnético en el punto p, producida por la corriente que circula el segmento recto, se puede expresar en términos de los ángulos φ_1 y φ_2 en la forma:

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)$$



Solución

Utilizando el resultado obtenido en el problema anterior

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\text{sen } \theta_1 + \text{sen } \theta_2)$$

para esta caso, de la figura se tiene $\theta_1 = \varphi_1 + \pi/2$ $\theta_2 = \varphi_2 - \pi/2$, entonces sustituyendo en la ecuación anterior, se tiene

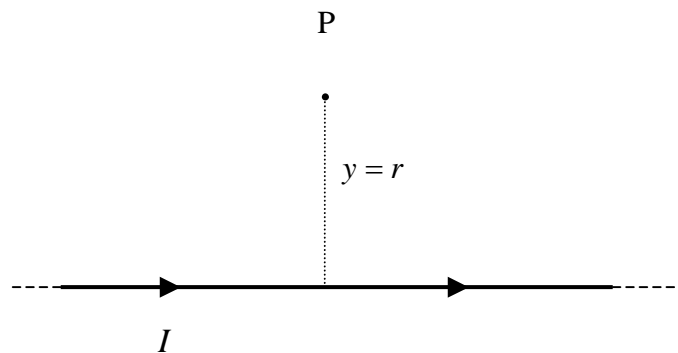
$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\text{sen}(\varphi_1 + \pi/2) + \text{sen}(\varphi_2 - \pi/2))$$

de donde se encuentra

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)$$

Problema 7.16

- a) Utilice la expresión encontrada para determinar el campo producido por segmentos rectos con corriente, para calcular el campo producido por un **conductor recto de longitud infinita** en un punto p, ubicado a una distancia $y = r$ del conductor
- b) Utilice la **ley de ampere** par realizar el cálculo anterior



Solución

La expresión para segmentos rectos está dada por

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\text{sen } \theta_1 + \text{sen } \theta_2)$$

De la figura anterior, es fácil ver que para que el conductor recto tenga longitud infinita se debe cumplir que

$$\theta_1 = \theta_2 \equiv \frac{\pi}{2}$$

Luego, reemplazando esto valores se obtiene

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- b) de la ley de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

Se tiene

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = \mu_0 I ; \text{ dado que } B = Cte$$

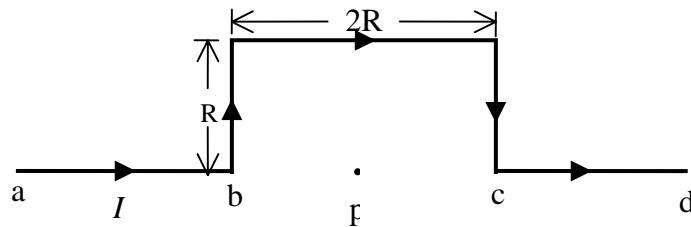
$$B \oint dl = B 2\pi r = \mu_0 I$$

De donde se encuentra

$$B = B_p = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Problema 7.17

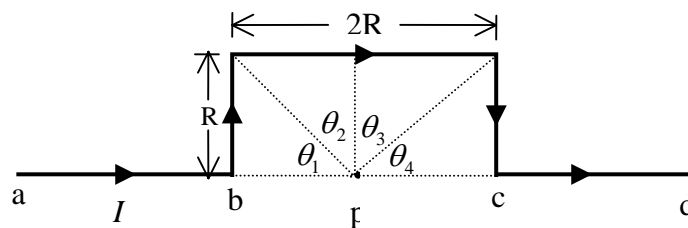
Determine el campo magnético en el punto p, producido por el conductor de la figura por el cual circula una corriente I



Solución:

Según la ley de Biot-Savart el campo en p está dado por

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. a \rightarrow b} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. R \uparrow} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. 2R} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. R \downarrow} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. c \rightarrow d} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$



De la figura notamos que para los segmento $a \rightarrow b$ y $c \rightarrow d$, se cumple que

$$(\vec{dl} \times \hat{r})_{Seg. a \rightarrow b} = (\vec{dl} \times \hat{r})_{Seg. c \rightarrow c} = 0$$

Entonces

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. R \uparrow} \frac{\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. 2R} \frac{\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. R \downarrow} \frac{\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2}$$

De la figura se puede apreciar que cada segmento recto de longitud R, le corresponde un ángulo de $\theta = \pi/4$. Aplicando la expresión obtenida anteriormente

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\text{sen} \theta_i + \text{sen} \theta_j)$$

Para este caso se tiene $y = R$

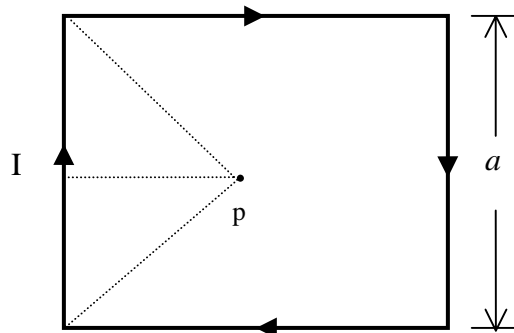
$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \text{sen} \theta_1 + \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\text{sen} \theta_2 + \text{sen} \theta_3) + \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \text{sen} \theta_4$$

Dado que todos los ángulos son iguales a $\pi/4$, se encuentra

$$B_p = 4 \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \text{sen}(\pi/4) = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{\pi R \cdot 2}$$

Problema 7.18

Determine el campo magnético en el centro de una espira cuadrada de lado a , por la cual circula una corriente I



Solución

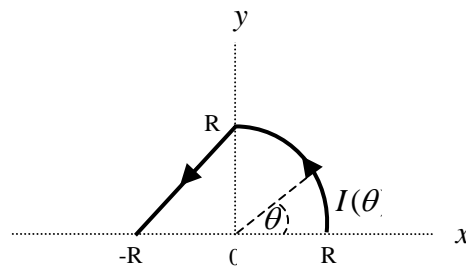
Teniendo presente el problema anterior, y la figura de la espira cuadrada, para $y = a/2$, $\theta_1 = \theta_2 = \pi/4$, se encuentra que

$$B_p = 4 \frac{\mu_0 I}{4\pi(a/2)} (\text{sen}(\pi/4) + \text{sen}(\pi/4))$$

$$B_p = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$$

Problema 7.19

Una corriente no uniforme dada por $I(\theta) = I_0 \cos(\theta/2)$; $0 \leq \theta \leq \pi$, circula por un conductor que tiene un lado recto y un lado semicircular de radio R .



- Calcular el campo magnético \vec{B} en el origen de coordenadas generado por el lado semicircular.
- Si el sistema completo se somete a un campo magnético externo uniforme $\vec{B}_{ext} = (B_0, B_0)$; $B_0 = Cte > 0$. Calcular la fuerza sobre todo el conductor debido al campo magnético aplicado

Solución:

Según la ley de Boit-Savart se tiene que

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}; \quad I = I(\theta)$$

Para el lado semicircular $d\vec{l} \times \hat{r} = dl \hat{k} \equiv Rd\theta \hat{k}$; $r = R = Cte$. Entonces con estas consideraciones y sustituyendo el valor de $I = I(\theta)$, se obtiene

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0 \cos(\theta/2)}{4\pi} \frac{Rd\theta}{R^2} \hat{k}$$

luego

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi R} \hat{k} \int_0^{\pi/2} \cos(\theta/2) d\theta$$

b) El elemento de fuerza está dado por

$$d\vec{F} = I(\theta)d\vec{l} \times \vec{B}_{ext}$$

En este caso $d\vec{l} = dl(-\text{sen}\theta, \text{cos}\theta)$, donde $dl = Rd\theta$, luego

$$d\vec{l} \times \vec{B}_{ext} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -dl\text{sen}\theta & dl\text{cos}\theta & 0 \\ B_0 & B_0 & 0 \end{vmatrix} = -B_0 dl(\text{sen}\theta + \text{cos}\theta) \hat{k}$$

Sustituyendo e integrando, se encuentra

$$d\vec{F} = I(\theta)d\vec{l} \times \vec{B}_{ext}$$

$$\vec{F} = -I_0 B_0 R \hat{k} \int_0^{\pi/2} \cos(\theta/2)(\text{sen}\theta + \text{cos}\theta) d\theta$$

$$\vec{F} = -I_0 B_0 R \hat{k} \left\{ \int_0^{\pi/2} \cos(\theta/2)\text{sen}\theta d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos(\theta/2)\text{cos}\theta d\theta \right\}$$

Problema 7.20

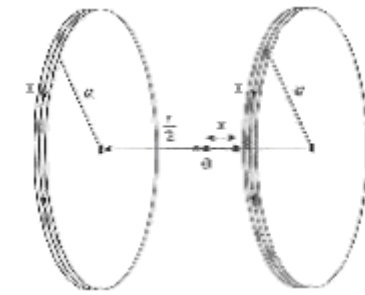
Dos carretes circulares iguales de radio a y N espiras, por los cuales circulan corrientes iguales I , son coaxiales y están separados una distancia r , calcular:

a) El campo magnético B en un punto del eje común a una distancia x del centro del sistema.

b) Demostrar que si $r = a$ (carretes de Helmholtz)

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = 0 \quad \text{para } x = 0$$

c) Calcular, en el caso en que $r = a$, el cociente entre los valores del campo para $x = a/4$ y para $x = 0$.



Solución

a) El campo magnético producido por un carrete circular de radio a y N espiras recorrido por una corriente I en un punto del eje que dista b del centro del carrete tiene la dirección del eje y su módulo es

$$B = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

En este caso, el campo producido por el sistema de carretes en un punto que dista de cada carrete

$$\left(\frac{r}{2} - x\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{r}{2} + x\right)$$

respectivamente, es

$$|B| = \frac{\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{\left[\left(\frac{r}{2} - x\right)^2 + a^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[\left(\frac{r}{2} + x\right)^2 + a^2\right]^{3/2}} \right\}$$

b)

$$\frac{dB}{dx} = -\frac{3\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ \frac{-2\left(\frac{r}{2}-x\right)}{\left[\left(\frac{r}{2}-x\right)^2+a^2\right]^{5/2}} + \frac{2\left(\frac{r}{2}+x\right)}{\left[\left(\frac{r}{2}+x\right)^2+a^2\right]^{5/2}} \right\}$$

$$\frac{d^2B}{dx^2} = -\frac{3\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{\left[\left(\frac{r}{2}-x\right)^2+a^2\right]^{5/2}} + \frac{5}{2} \frac{-2\left(\frac{r}{2}-x\right)\left(\frac{r}{2}-x\right)}{\left[\left(\frac{r}{2}-x\right)^2+a^2\right]^{7/2}} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{\left[\left(\frac{r}{2}+x\right)^2+a^2\right]^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{2\left(\frac{r}{2}+x\right)\left(\frac{r}{2}+x\right)}{\left[\left(\frac{r}{2}+x\right)^2+a^2\right]^{7/2}} \right\}$$

si $r = a$ y para $x = 0$:

$$\left(\frac{d^2B}{dx^2}\right)_{r=a}^{x=0} = -\frac{3\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{5a^2}{4}\right)^{5/2}} - 5 \frac{\frac{a^2}{4}}{\left(\frac{5a^2}{4}\right)^{7/2}} + \frac{1}{\left(\frac{5a^2}{4}\right)^{5/2}} - 5 \frac{\frac{a^2}{4}}{\left(\frac{5a^2}{4}\right)^{7/2}} \right\} = 0$$

c) El valor del campo para $r = a$ y para $x = 0$

$$B_{x=0} = \frac{\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ \frac{2}{\left(\frac{5a^2}{4}\right)^{3/2}} \right\} = \frac{8}{5^{3/2}} \frac{\mu_0 N I}{a} = 0,716 \frac{\mu_0 N I}{a}$$

y para $x = a/4$:

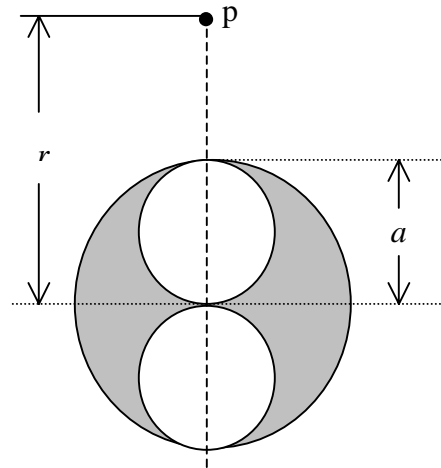
$$B_{x=a/4} = \frac{\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{\left[\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{4} \right)^2 + a^2 \right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{4} \right)^2 + a^2 \right]^{3/2}} \right\} = 0,714 \frac{\mu_0 N I}{a}$$

$$\frac{B_{x=a/4}}{B_{x=0}} = 0,997$$

es decir, para $x = a/4$ el campo es $\cong 99,7\%$ del campo en el centro. De modo que los carretes de Helmholtz producen un campo muy uniforme en su región central.

Problema 7.21

Un largo conductor cilíndrico de radio a tiene dos cavidades cilíndricas de diámetro a a lo largo de toda su longitud. Una corriente I se dirige hacia afuera de la página y es uniforme por toda la sección transversal del conductor. Encuentre la magnitud y dirección del campo magnético en el punto p, en función de I , r y a .



Solución:

El campo magnético en el punto p (por superposición) está dado por

$$\vec{B}_p = \vec{B}_1 - \vec{B}_2 - \vec{B}_3$$

donde: \vec{B}_1 corresponde al campo del cilindro sin cavidades

$\vec{B}_{2,3}$ corresponden a los campos de las cavidades (superior e inferior respectivamente)

Entonces, según la Ley de Ampere, para \vec{B}_1 se tiene que

$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 = \mu_0 I_{1_{ence}}$$

dado que $\vec{B}_1 \uparrow \uparrow d\vec{l}_1$ e $I_{1_{enc}} = 2I$, se tiene que

$$\oint B_1 dl_1 = B_1 2\pi r \equiv \mu_0 (2I) \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I}{\pi r}$$

de igual forma para \vec{B}_2 , se puede escribir

$$\oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{l}_2 = \mu_0 I_{2_{ence}}$$

dado que $\vec{B}_2 \uparrow \uparrow d\vec{l}_2$ e $I_{2_{enc}} = I_{3_{enc}} \equiv I/2$, se tiene que

$$\oint B_2 dl_2 = B_2 2\pi(r - a/2) \equiv \mu_0 (I/2) \Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi(r - a/2)}$$

En forma análoga se encuentra que

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi(r + a/2)}$$

Reemplazando los valores obtenidos en $\vec{B}_p = \vec{B}_1 - \vec{B}_2 - \vec{B}_3$, se encuentra:

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{\pi r} - \frac{\mu_0 I}{4\pi(r - a/2)} - \frac{\mu_0 I}{4\pi(r + a/2)}$$

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{\pi r} \left(\frac{2r^2 - a^2}{4r^2 - a^2} \right)$$

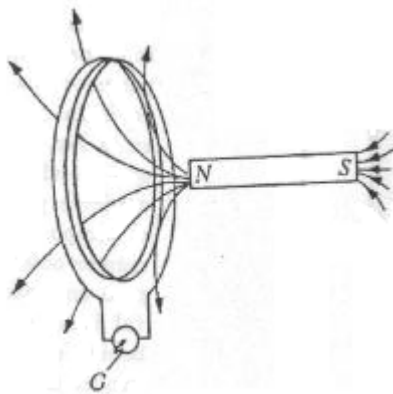
Notamos que el campo en el punto p apunta hacia la izquierda

CAPÍTULO VIII

LEY DE INDUCCIÓN FARADAY

8.1. Ley de Faraday

En 1831 Faraday observó experimentalmente que cuando en una bobina que tiene conectado un galvanómetro como se muestra en la Fig.



y se hace variar un campo magnético introduciendo un imán, se produce una desviación en el galvanómetro lo que es equivalente a producir una corriente inducida en la bobina, pero este fenómeno sucede únicamente cuando el imán está en movimiento.

De este y otros experimentos, Faraday estableció que se induce una *fem* (fuerza electromotriz) en la bobina donde está conectado el galvanómetro, y cuya magnitud depende de la variación del campo y del área con respecto al tiempo, es decir del cambio del flujo magnético con respecto al tiempo, se puede expresar en la forma:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (8.1)$$

A la ecuación anterior se conoce como “**Ley de la Inducción de Faraday**”, donde ε es la *fem* inducida, Φ_B y $\frac{d\Phi_B}{dt}$ es la razón del cambio del flujo magnético, con respecto al tiempo,

el signo menos tiene una relación con la polaridad de la *fem* inducida como lo veremos en la siguiente sección.

8.2. Ley de Lenz

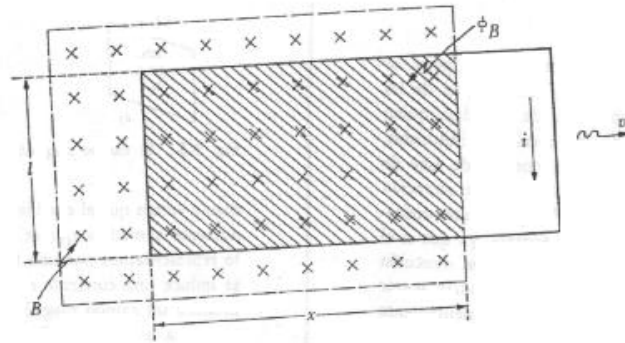
En la sección anterior se analizó cómo se inducen las *fem* pero no se mencionó nada acerca de la dirección de esta *fem*, ni (de las corrientes inducidas. Fue H. F. Lenz, contemporáneo de Faraday, quien en una forma sencilla, estableció el sentido de las corrientes inducidas, mediante el siguiente enunciado que se conoce con el nombre de Ley de Lenz: **“La corriente que es inducida en un circuito tendrá una dirección de tal forma que se oponga a la causa que la produce”**, que es una consecuencia directa del principio de la conservación de la energía.

8.3. *fem* inducida

De acuerdo a la Ley de Faraday que se define con la Ec. (8.1) se pueden inducir *fem* cuando existe una razón de cambio del flujo magnético con respecto al tiempo, vamos a considerar un ejemplo sencillo en el cual se tiene una espira dentro de un campo magnético (el eje de la espira es paralelo a la dirección del campo para simplificar el ejemplo) si el campo magnético varía con el tiempo, entonces, se induce una *fem* en la espira, si movemos la espira perpendicularmente a la dirección del campo magnético, que se mantiene uniforme (con una velocidad constante), también se induce una *fem* .

Al realizar un análisis cuantitativo vamos a considerar primero el caso en que tenemos una espira rectangular de alambre con resistencia R , la cuál se encuentra parcialmente dentro de un campo magnético, como se muestra en la Fig. la espira se mueve hacia afuera del campo magnético con una velocidad v . El flujo magnético encerrado por la espira en un instante dado es:

$$\phi_B = Blx \quad (8.2)$$



donde lx es el área de la espira; como B y l no varían, obviamente se tiene que:

$$v = -\frac{dx}{dt}$$

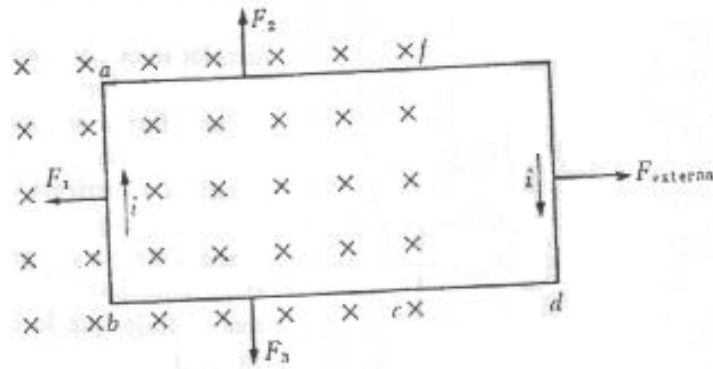
la velocidad es igual $-dx/dt$ ya que x está decreciendo. El cambio del flujo magnético ϕ_B con respecto al tiempo de acuerdo a la Ley de Faraday nos da la fem inducida, esto es:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} = Blv \quad (8.3)$$

La fem inducida produce una corriente en el alambre que es igual a:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Blv}{R} \quad (8.4)$$

donde R es la resistencia del alambre.



La fuerza que aparece en los segmentos *af* y *bc* son iguales en magnitud, pero tienen direcciones opuestas, como se muestra en la figura anterior.

8.4. Campos magnéticos variables en el tiempo

Las formas en las que el flujo magnético puede variar, se deben a la variación del área con respecto al tiempo, y también a la variación del campo magnético.

La *fem* está dada por

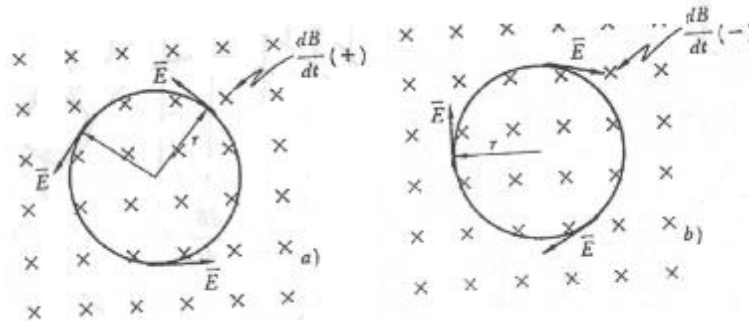
$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{8.5}$$

una forma más general de expresar la Ley de Faraday es a partir de las combinaciones de las ecuaciones (8.1) y (8.5), esto es:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} \tag{8.6}$$

de aquí se concluye que en que “un campo magnético que varía en función del tiempo nos induce un campo eléctrico”. De acuerdo a la Ec. (8.6) se tiene que el área encerrada por la trayectoria lineal cerrada sobre el campo eléctrico inducido equivale al área del flujo magnético.

La dirección del campo eléctrico inducido se puede obtener a partir de la Ley de Lenz, considerando que el campo eléctrico que produce la corriente inducida está en la misma dirección que está en la Fig. a), tenemos un campo magnético entrando al plano de la hoja y su razón de cambio respecto al tiempo es positivo, es decir, que B está aumentando, entonces se produce un campo eléctrico tangente a una trayectoria circular con una dirección que es contraria a la dirección de movimiento de las manecillas del reloj.



En la Fig. b), la razón del cambio del campo magnético respecto al tiempo es negativo, es decir, que B está decreciendo, entonces, la dirección de E es igual a la dirección del movimiento de las manecillas del reloj.

Algo que es muy importante hacer notar es la diferencia entre campos eléctricos producidos por carga eléctrica y los campos eléctricos inducidos que son producidos al variar un campo, magnético con respecto al tiempo, mientras que los campos eléctricos que son producidos por carga eléctrica “son conservativos”, es decir, que cualquier integral de línea cerrada sobre el campo E es cero, esto es:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{para campos eléctricos que son producidos por carga eléctrica})$$

Por otro lado, en los campos eléctricos inducidos la integral de línea cerrada sobre el campo E es igual a $-d\phi_B/dt$ de acuerdo a la Ley de Faraday, que se define matemáticamente por:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

es decir, que los campos eléctricos producidos por campos magnéticos en función del tiempo “no son conservativos”.

Problemas resueltos

Problema 8.1

Escriba la Ley de Faraday en forma diferencial

Solución

La ley de Faraday escrita en forma integro-diferencial tiene la forma

$$\varepsilon = \oint E \cdot d\vec{l} = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

donde $\phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$, sustituyendo en la expresión anterior, se tiene

$$\oint E \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \left(\iint \vec{B} \cdot d\vec{s} \right) \equiv \iint \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$$

Utilizando el teorema de Stokes

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{s}$$

Comparando las dos últimas ecuaciones, se encuentra

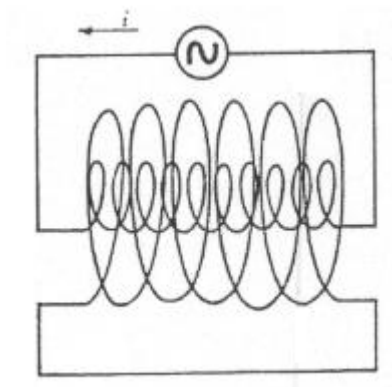
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

La expresión anterior, se conoce con el nombre de forma diferencial de la Ley de Faraday, y forma parte de una de las ecuaciones de Maxwell, que a su vez corresponde a una de las cuatro ecuaciones fundamentales del electromagnetismo

Problema 8.2

Un solenoide de 0.20 [m] de longitud como se muestra en la Fig. tiene 200 vueltas, el radio de una de las vueltas es de 0.05 [m] y su resistencia es de 40 [Ω]. En su interior hay un solenoide de igual longitud y de 400 vueltas con un radio 0.02 [m] cada una de las vueltas. Si se conecta el solenoide interior a una fuente de corriente senoidal $i = i_0 \text{sen } 2\pi \nu t$ donde ν es la frecuencia de la fuente de corriente y es de 60 [Hz], determine la máxima corriente que circula por el solenoide exterior:

$$i_0 = 10 \text{ [A]}.$$



Solución:

De la Ec. 7.6 calculamos el campo magnético en el solenoide interior

$$B = \mu_0 n_1 i = \mu_0 \frac{N_1}{l} i$$

el flujo magnético lo determinarnos a partir de la Ec. (6.1).

$$\phi_B = B A = \left(\mu_0 \frac{N_1}{l} i_0 \right) \pi r_1^2 \text{sen } 2\pi \nu t$$

de la Ec. (8.1) tenemos que la fem inducida en el solenoide exterior es

$$\varepsilon = -N_2 \frac{d\phi_B}{dt} = -N_2 \mu_0 \frac{N_1}{l} \pi r_1^2 i_0 2\pi f \cos 2\pi \nu t$$

Para el cálculo de la fem inducida se toma el radio del solenoide interior ya que podemos despreciar el campo magnético fuera de esta región.

De la Ec. (4.5) calculamos la corriente máxima inducida, esto es:

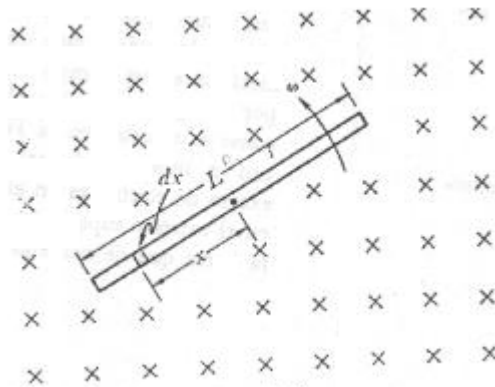
$$i_{m\acute{a}x} = \frac{\varepsilon_0}{R} = \frac{\mu_0 2\pi^2 \nu N_1 N_2 r_1^2 i_0}{l R}$$

Sustituyendo valores:

$$i_{m\acute{a}x} = 5.95 \times 10^{-2} \text{ [A]}.$$

Problema 8.3

Determine la diferencia de potencial entre el centro y uno de los extremos de una barra metálica de longitud L que gira con velocidad angular constante ω dentro de un campo magnético B uniforme como se muestra en la Fig.



Solución:

Si escogemos un pequeño diferencial de longitud de la barra a una distancia x del centro de rotación tendrá una velocidad tangencial $v = \omega x$, entre el centro y sus extremos se producirá una diferencia de potencial. De acuerdo a la Ec. (8.3) tenemos que:

$$d\varepsilon = Bv dx = B\omega x dx$$

entonces:

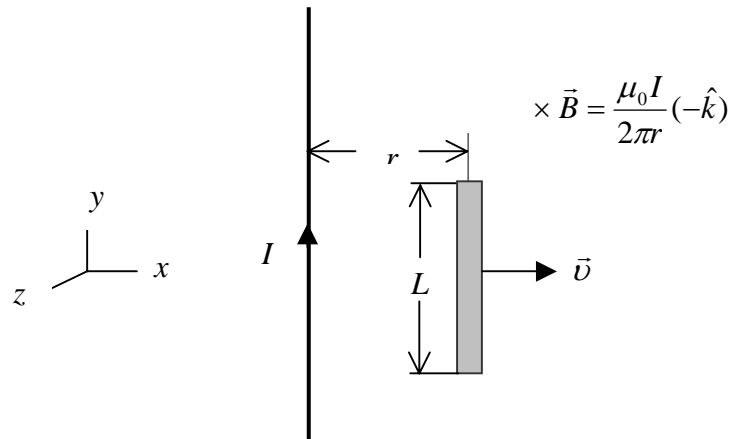
$$\varepsilon = \int d\varepsilon = \int_0^{L/2} B\omega x dx = B\omega \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{L/2} = \frac{B\omega L^2}{8}$$

¿Tendrán los extremos de la barra el mismo potencial?

Problema 8.4

Una barra conductora de longitud L se mueve con velocidad v constante, perpendicular a un largo alambre recto que conduce una corriente I , tal como se muestra en la siguiente figura. Muestre que la magnitud de la *fem* generada entre los extremos de la barra es

$$|\varepsilon| = \frac{\mu_0 v I}{2\pi r} L$$



Solución

De la ley de Faraday se tiene que $\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$ con $\phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$

De la Fig. se ve que $\vec{B} \uparrow \uparrow d\vec{s} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{s} = B ds$, además: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $ds = dx dy$, entonces

$$\phi_B = \iint B ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \int_0^{x(t)} dx \int_0^L dy$$

$$\phi_B = \frac{\mu_0 I L}{2\pi r} x(t)$$

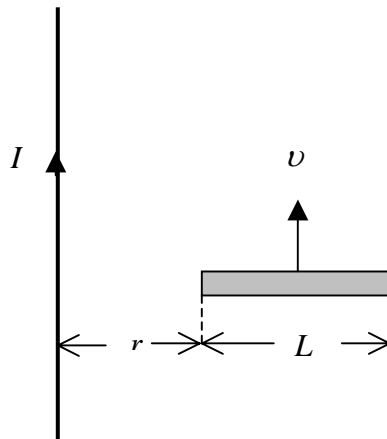
Sustituyendo en $\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$, se encuentra

$$|\varepsilon| = \frac{\mu_0 v I}{2\pi r} L \quad ; \quad v = \frac{dx(t)}{dt}$$

Problema 8.5

Una barra conductora de longitud L con velocidad v paralela a un largo alambre que conduce una corriente estable I . El eje de la barra se mantiene perpendicular al alambre con el extremo cercano a una distancia r , como se muestra en la siguiente figura. Demuestre que la magnitud de la *fem* en la barra es

$$|\mathcal{E}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi} v \ln\left(1 + \frac{L}{r}\right)$$



Solución

De la ley de Faraday se tiene que $\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt}$ con $\phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$

De la Fig. se ve que $\vec{B} \uparrow \uparrow d\vec{s} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{s} = Bds$, además: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $ds = drdy$, entonces

$$\phi_B = \iint Bds = \iint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} drdy$$

Luego el flujo está dado por

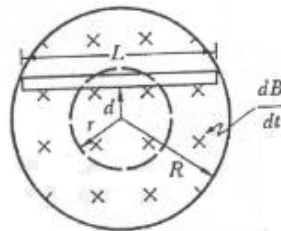
$$\phi_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{y(t)} dy \int_r^{r+L} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} y(t) \ln\left(\frac{r+L}{r}\right)$$

Sustituyendo en $\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$, se encuentra

$$|\varepsilon| = \frac{\mu_0 I}{2\pi} v \ln\left(1 + \frac{L}{r}\right) \quad ; \quad v = \frac{y(t)}{dt}$$

Problema 8.6

Demuestre que el campo eléctrico inducido es constante en una barra metálica de longitud L , que se encuentre en una región cilíndrica de radio R en el espacio donde el campo magnético cambia con una rapidez dB/dt como se ilustra en la siguiente figura



Solución:

Para cualquier punto dentro de la región cilíndrica con respecto al centro, el campo eléctrico se puede obtener de la Ec. (8.6):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

La Ec. (8.6) se puede expresar también de la siguiente manera:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Evaluando ambas integrales tenemos:

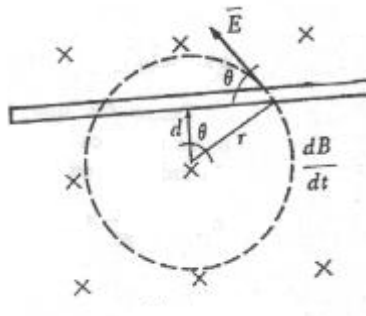
$$E \cdot 2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

Simplificando y despejando el campo eléctrico:

$$E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

d es la distancia perpendicular entre la barra y el centro de la región cilíndrica que se puede determinar del teorema de Pitágoras, esto es:

$$d = \sqrt{R^2 - L^2/4}$$



Para cualquier trayectoria circular de radio $d \leq r \leq R$ se puede obtener el campo E sobre la barra. De la Fig. anterior vemos que:

$$E_{barra} = E \cos \theta$$

donde el $\cos \theta = \frac{d}{r}$ y $E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$, sustituyendo en la expresión anterior:

$$E_{barra} = \left(-\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \right) \frac{d}{r}$$

Simplificando:

$$E_{barra} = -\frac{d}{2} \frac{dB}{dt}$$

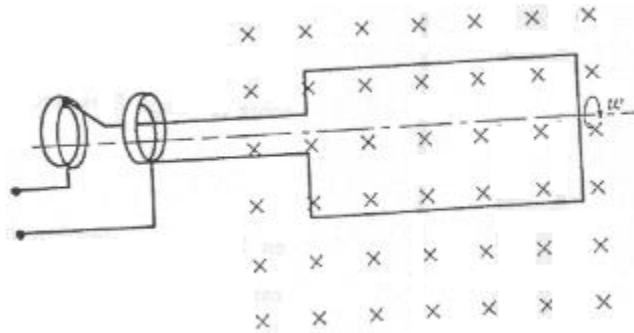
Sustituyendo el valor de d obtenemos:

$$E_{\text{barra}} = -\frac{1}{2} \frac{dB}{dt} \sqrt{R^2 - L^2/4}$$

de esta expresión observamos que el campo eléctrico para cualquier punto de la barra es constante.

Problema 8.7

Una bobina rectangular de N vueltas de lados l y h gira con una frecuencia f en un campo magnético uniforme B como se muestra en la siguiente. Determine el voltaje inducido en las terminales de la bobina.



Solución:

El flujo magnético está dado

$$\phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Evaluando la integral:

$$\phi_B = AB \cos \theta$$

El ángulo $\theta = \omega t$ que es el ángulo entre B y el vector área A , que está variando con respecto al tiempo, entonces:

$$\phi_B = BA \cos \omega t$$

derivando con respecto al tiempo obtenemos la fem que se induce:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = BA \omega \text{sen} \omega t$$

Sustituyendo el valor de la frecuencia angular $\omega = 2\pi\nu$ y el área de la espira $A = lh$, se obtiene la fem inducida:

$$\varepsilon = (2\pi lh B \nu) \text{sen} 2\pi \nu t$$

definiendo

$$\varepsilon_0 = \text{voltaje máximo inducido}$$

o sea:

$$\varepsilon_0 = 2\pi lh B \nu$$

Entonces la fem inducida se puede escribir nuevamente por:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \text{sen} 2\pi \nu t$$

Problema 8.8

En una región cilíndrica en el espacio de radio a , un campo magnético varía con una rapidez dB/dt . Calcule el campo eléctrico para trayectorias circulares con radio r mayor que a . (ver Fig.).

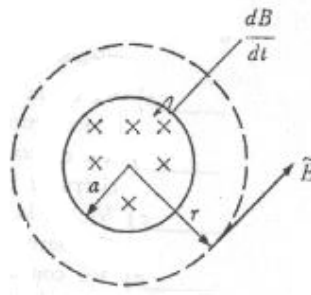
Solución:

De la ecuación 8.6 tenemos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

El flujo magnético se determina de la Ec. 6.1. Esto es:

$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$$



Para este caso:

$$\phi_B = B A$$

Sustituyendo en la Ec. 8.6 y considerando que sólo B varía con el tiempo, obtenemos que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d(B A)}{dt} = A \left(\frac{-dB}{dt} \right)$$

evaluando:

$$E \cdot 2\pi r = -\pi a^2 \frac{dB}{dt}$$

Simplificando y despejando:

$$E = -\frac{a^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

Problema 8.9

Un cilindro (largo) conductor de conductividad σ , de radio R y longitud h , está rodeado por un solenoide de iguales dimensiones que tiene n espiras por unidad de longitud y está recorrido por una corriente $I = I_0 \text{sen} \omega t$. Determine:

- El campo magnético creado por el solenoide
- El campo eléctrico inducido
- La densidad de corriente inducida en el cilindro.

Solución

a) De la ley de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

dado que $\vec{B} \uparrow \uparrow d\vec{l} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl$, además $B = |\vec{B}| = Cte$, luego

$$\oint B dl = B \oint dl = Bl = \mu_0 NI$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I_0 \text{sen} \omega t$$

b) De la ley de Faraday escrita en la forma

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

donde $\vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{l} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = E dl$ ($E=Cte$), se tiene que

$$\oint E dl = E \oint dl = E 2\pi r = -\frac{d}{dt} \left[\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \right]$$

$$E 2\pi r = -\frac{d}{dt} \left[\oint B ds \right] = -\frac{d}{dt} (BA)$$

Dado que $A = \pi r^2$, y $B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I_0 \text{sen } \omega t$, entonces se encuentra

$$E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} = -\mu_0 n I_0 \frac{\omega r}{2} \cos \omega t$$

c) Como

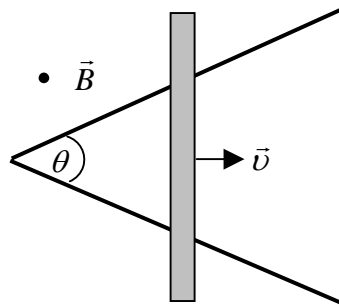
$$J = \sigma E$$

se obtiene

$$J = -\sigma \mu_0 n I_0 \frac{\omega r}{2} \cos \omega t$$

Problema 8.10

Dos rieles conductores forman un ángulo θ en donde se unen sus extremos. Una barra conductora en contacto con los rieles y formando un triángulo isósceles con ellos empieza a moverse en el vértice en el instante $t = 0$, y se mueve con rapidez constante v hacia la derecha, como se muestra en la figura. Un campo magnético uniforme \vec{B} apunta hacia fuera de la página. Determine el flujo y la fem inducida.



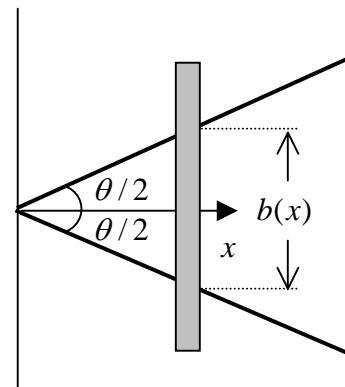
Solución:

Según la ley de Faraday, la fem inducida está dada por :

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

donde

$$\Phi_m = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$$



como el campo es paralelo con el vector área y \vec{B} es constante, se tiene

$$\Phi_m = BA(x)$$

de la figura se tiene que $A(x) = \frac{1}{2}bx$, reemplazando en el flujo se obtiene

$$\Phi_m = \frac{1}{2}Bbx$$

de la figura se encuentra que: $\tan(\theta/2) = \frac{b/2}{x}$, $\Rightarrow b(x) = 2x \tan(\theta/2)$

luego

$$\Phi_m = Bx^2 \tan(\theta/2)$$

reemplazando en la ley de Faraday, se encuentra

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(Bx^2 \tan(\theta/2))$$

$$\varepsilon = -2xvB \tan(\theta/2)$$

CAPÍTULO IX

INDUCTANCIA

9.1. Definición de inductancia

Cuando en un solenoide se hace circular una corriente, comienza a formarse un campo magnético en su interior, produciéndose un cambio en el flujo magnético hasta que la corriente se estabiliza, éste sería para el caso en que el solenoide se conectaba a una fuente de corriente directa, de aquí que en el intervalo de tiempo desde que se conecta el interruptor hasta que se estabiliza la corriente, se autoinduce una fem en el solenoide que es directamente proporcional a la razón de cambio del flujo magnético y éste a la razón de cambio de la corriente que se puede escribir mediante la siguiente expresión:

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt} \quad (9.1)$$

donde L es la constante de proporcionalidad que es llamada autoinductancia o inductancia del circuito. La ecuación (9.1) es válida para cualquier circuito estacionario, en el cual los cambios de flujo magnético resultan de los cambios en la corriente que pasa por el circuito.

De la Ec. (9.1) se pueden obtener las relaciones matemáticas para el cálculo de la inductancia a partir de la Ley de Faraday, esto es:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d\phi_B}{dI} \frac{dI}{dt} \quad (9.2)$$

igualando la Ec. (9.1) y (9.2) se obtiene que la inductancia o la constante de inducción se define por:

$$L \equiv \frac{d\phi_B}{dI} \quad (9.3)$$

Para los casos en que el flujo es directamente proporcional a la corriente la inductancia L es igual a:

$$\Phi_B / I .$$

Las unidades de la inductancia son volts-seg/ampere, esta unidad se llama Henry, en honor de Joseph Henry, científico americano que descubrió la Ley de la Inducción electromagnética en la misma época que Faraday.

$$\text{Volt-segundo/Ampere} = \text{Henry}$$

comúnmente se utilizan submúltiplos de 1 Henry como:

$$\text{mH (mili Henry)} = 10^{-3} \text{ Henrys.}$$

$$\mu\text{H (micro Henry)} = 10^{-6} \text{ Henrys.}$$

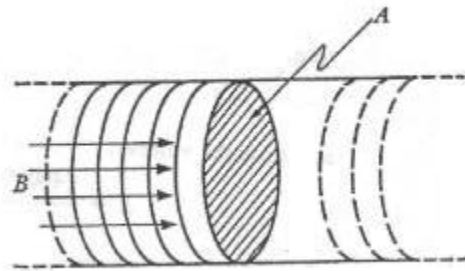
La inductancia se representa simbólicamente por L , el instrumento o aparato que tiene cierta inductancia en un circuito, se le conoce con el nombre de Inductor.

9.2. Calculo de la inductancia

Para algunos inductores que tienen simetría simple se puede calcular fácilmente su inductancia, el caso más sencillo es el del solenoide muy largo y de vueltas muy juntas (con núcleo de aire) en el cual se puede determinar el flujo magnético de la Ec. 6.1.

$$\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B A$$

donde A es el área de la sección transversal del solenoide y B el campo magnético como se muestra en la Fig. De la Ec. (7.6) se tenga que el campo magnético en el interior del solenoide es:



donde i es la corriente en el solenoide y n es el número de vueltas por unidad de longitud, esto es $n = N/l$, por lo tanto, el enlace del flujo magnético en el solenoide es igual al número total de vueltas N por el flujo de una de éstas, es decir, N_{ϕ_B} . De la Ec. (9.3) se tiene que:

$$L = \frac{d}{di} (N_{\phi_B})$$

donde:

$$N_{\phi_B} = N A B = N A \mu_0 n i = \frac{N^2 A \mu_0 i l}{l^2}$$

aplicando la Ec. 9.3 tenemos que:

$$L = \frac{d}{di} \frac{N^2 A \mu_0 i l}{l^2} = n^2 \mu_0 A l \tag{9.4}$$

De la Ec. 9.4, vemos que la inductancia para un solenoide de longitud l y de área A , depende de su volumen y del cuadrado de su número de vueltas por unidad de longitud, dependiendo la inductancia únicamente de factores geométricos.

9.3. Energía del campo magnético

Cuando una bobina se conecta a una batería se produce un flujo magnético cambiante hasta que se estabiliza la corriente, y por consiguiente, se induce una fem ε , en ese intervalo de tiempo; de la definición de inductancia Ec. (9.1) tenemos que:

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$$

para producir esta fem inducida y la corriente se tiene que realizar un trabajo, que lo hace la fuente que produce la corriente. La fem inducida aparece en las terminales de la bobina, de acuerdo con Ec. (4.12) se obtiene que la potencia instantánea que nos proporciona la fuente, esto es:

$$P = \frac{dW}{dt} = \varepsilon I$$

sustituyendo la magnitud de la fem inducida en la Ec. 4.12 obtenemos:

$$\frac{d\omega}{dt} = I L \frac{dI}{dt} \quad (9.5)$$

Para encontrar el trabajo realizado por la batería que equivale a la energía almacenada en forma de campo magnético por la bobina, se integra el diferencial de energía que se obtiene a partir de la Ec. 9.5, y que los diferenciales de tiempo son iguales, entonces:

$$W_B = \int d\omega = \int_{I=0}^I I L dI \quad (9.6)$$

$$W_B = \frac{1}{2} L I^2$$

que es la energía almacenada por el inductor, esta energía, se puede recuperar como la vamos a ver en la sección 9.5. La ecuación (9.6) es válida para cualquier inductor, esta ecuación es muy similar a la Ec. (5.12) que es la energía potencial eléctrica almacenada por un condensador que tiene una diferencia de potencial V .

$$W_E = \frac{1}{2} C V^2$$

9.4. Densidad de energía del campo magnético

La energía almacenada por un inductor puede expresarse por unidad de volumen, lo que nos da el concepto de densidad de energía en el campo magnético, que es un concepto similar al de

densidad de energía en el campo eléctrico que se vio en la sección 5,5, el cual se va a desarrollar para una bobina larga de longitud l y área A , al considerar que la energía almacenada por la bobina está uniformemente distribuida, entonces, se define la densidad de energía como:

$$u_B = \frac{\text{Energía almacenada}}{\text{volumen}}$$

$$u_B = \frac{(1/2)LI^2}{Al}$$

En la Ec. (9.4) se sustituye el valor de la inductancia para una bobina ($L = n^2 \mu_0 Al$) y se obtiene que:

$$u_B = \frac{1/2 n^2 \mu_0 l AI^2}{Al}$$

Simplificando y recordando que el campo magnético para un solenoide es $B = \mu_0 ni$ nos queda:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \tag{9.7}$$

con esta ecuación (Ec. 9.7) es posible definir que en cualquier punto del espacio en el vacío donde hay campo magnético B , existe una densidad de energía magnética. Esta ecuación tiene validez para cualquier caso donde existe campo magnético.

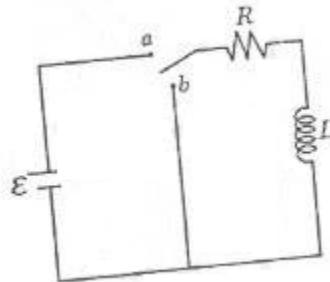
La densidad de energía de un campo magnético, dada por la Ec. (9.7) es muy similar a la densidad de energía del campo eléctrico, dada por Ec. (5.13)

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \tag{9.8}$$

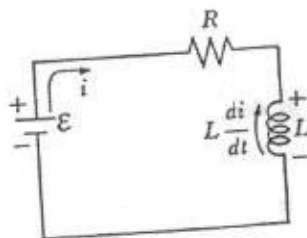
como se puede ver ambas densidades de energía son directamente proporcionales a B y E , aunque estas ecuaciones fueron derivadas a partir del solenoide y del condensador de placas paralelas (u_E y u_B), son válidas en general para cualquier caso en el que exista campo.

9.5. Circuitos LR

En la sección 5.6, se estudiaron los circuitos RC, donde se consideraron por primera vez corrientes variables en función del tiempo. Los circuitos RL, se comportan en una forma análoga, en la Fig. tenemos un circuito RL simple cuando se conecta el interruptor en el punto a , la resistencia y la inductancia que están en serie, quedan conectados a fem.



Al comenzar a circular una corriente por el circuito, algo que se puede observar experimentalmente en el laboratorio, es que si el circuito de la Fig. siguiente no tuviera inductancia,



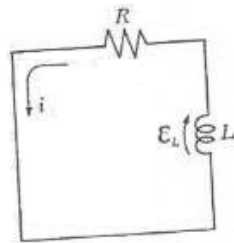
la corriente tiende a un valor \mathcal{E}/R más rápido que cuando tiene inductancia, esto se debe a que a medida que va aumentando la razón de cambio de la corriente con respecto al tiempo (di/dt) se induce una fem \mathcal{E}_L , en la inductancia que de acuerdo a la Ley de Faraday es:

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt} \quad (9.9)$$

Se puede realizar un estudio analítico del circuito cuando el interruptor se conecta en *a*, aplicando la segunda Ley de Kirchoff se obtiene la siguiente expresión:

$$\varepsilon - L \frac{di}{dt} - iR = 0 \quad (9.10)$$

que es una ecuación diferencial de primer orden, la cual se puede resolver al tomar como condiciones del circuito que para $t = 0$, $I = 0$ y que para un tiempo t , circula una corriente i en el circuito. Resolviendo la Ec. (9.2)



$$\frac{dI}{dt} + I \frac{R}{L} = \varepsilon / L$$

de donde:

$$dI = \frac{R}{L} \left(\frac{\varepsilon}{R} - I \right) dt$$

Ordenando términos:

$$\frac{dI}{\varepsilon / R - I} = \frac{R}{L} dt$$

Integrando:

$$\int_0^I \frac{dI}{\varepsilon / R - I} = - \int_0^t \frac{1}{L / R} dt$$

Se obtiene:

$$Ln(\varepsilon / R - I) \Big|_0^i = -\frac{1}{L/R} t \Big|_0^t$$

evaluando y despejando I se obtiene una expresión para la corriente que circula en el circuito LR en un tiempo t , esto es.

$$I = \varepsilon/R \left[1 - e^{-t/L/R} \right] \tag{9.11}$$

la constante L / R se le conoce con el nombre constante de tiempo inductivo y se representa por $\tau_L = L / R$.

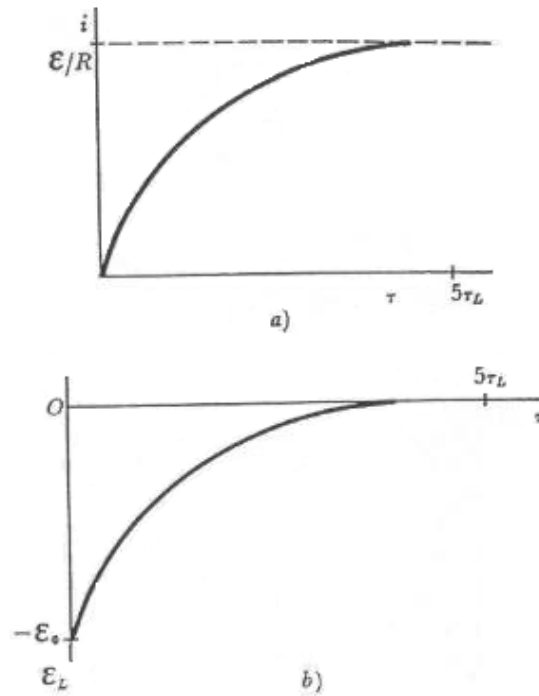
A partir de la Ec. (9.1) y derivando la corriente con respecto al tiempo en la Ec. (9.9) se obtiene la *fem* ε_L inducida en el inductor, esto es:

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt} = \varepsilon e^{-t/\tau_L} \tag{9.12}$$

Al graficar la Ec. (9.9) y (9. 10) se puede observar cómo varía la corriente y la *fem* inducida en el circuito LR .

De la aplicación de la Ley de Kirchhoff a este circuito de descarga se obtiene:

$$\varepsilon_L - IR = 0 \tag{9.13}$$

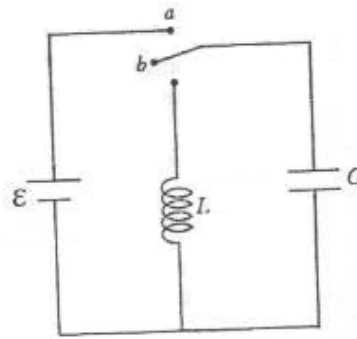


9.6. Circuitos LC

En la siguiente figura se tiene un circuito LC, que se va a considerar un circuito ideal, si conectamos el interruptor en “a” el condensador se empieza a cargar hasta llegar a tener, como máximo, un voltaje igual al de la fuente, y por consiguiente, se almacena una energía en el condensador expresada por la Ec. 5.10 que es igual a:

$$U_c = W = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C}$$

donde $q_0 = V_0 C$.



A partir del principio de la conservación de energía, se sabe que la energía total en el circuito es constante y es igual a la suma de la energía en el condensador y en el inductor, esto es:

$$W_L + W_c + W_T = \text{constante} \quad (9.14)$$

o

$$\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}q^2/C = W_T$$

si se deriva esta expresión (Ec. 9.14) con respecto al tiempo se tiene que:

$$Li \frac{di}{dt} + q/C \frac{dq}{dt} = 0 \quad (9.15)$$

Simplificando la ecuación (9.15) se obtiene:

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

de la ecuación (9.15) y considerando que

$$I = \frac{dq}{dt}$$

nos queda:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (9.16)$$

que es una ecuación diferencial de segunda orden y comúnmente se le conoce como “ecuación armónica”. Para la solución de la Ec. 9.16 puede recurrir a cualquier libro de ecuaciones diferenciales ya que no es el propósito de este curso discutir los métodos de solución para la Ec. (9.16).

La solución de la Ec. 9.16 es una función senoidal dada por:

$$q = q_0 \cos \omega t \quad (9.17)$$

Si se toma como condición que para $t = 0$ la carga en el condensador es q_0 . De acuerdo a lo que se discutió cuando se planteó el problema, es la solución que más se ajusta, q_0 y ω son determinadas específicamente para cada problema en cuestión.

Al derivar dos veces la Ec. (9.17) y reemplazarla en la Ec. (9.16), se determina el valor de ω , esto es:

$$\omega = 2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (9.18)$$

El período de oscilación del circuito LC lo podemos determinar a partir de la ecuación (9.18) que es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{LC} \quad (9.19)$$

de la Ec. (9.19) se puede observar que entre más grande sea el condensador el período es mayor debido a que tardaría más tiempo en descargarse y cargarse y algo similar sucede con el inductor.

De la Ec. (9.17) podemos determinar la corriente en el circuito derivándola, esto es:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_0 \operatorname{sen} \omega t \quad (9.20)$$

de la Ec. (9.20) vemos que la corriente máxima es:

$$I_0 = \omega q_0$$

en magnitud.

Si se reemplazan las Ec. (9.17) y (9.20) en la Ec. (9.14), se ve que para cualquier tiempo t la energía total en el circuito es constante, esto es:

$$U_T = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} q^2 / C$$

sustituyendo en las ecuaciones (9.17) y (9.20):

$$U_T = \frac{1}{2} L \omega^2 q_0^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{c} \cos^2 \omega t$$

como:

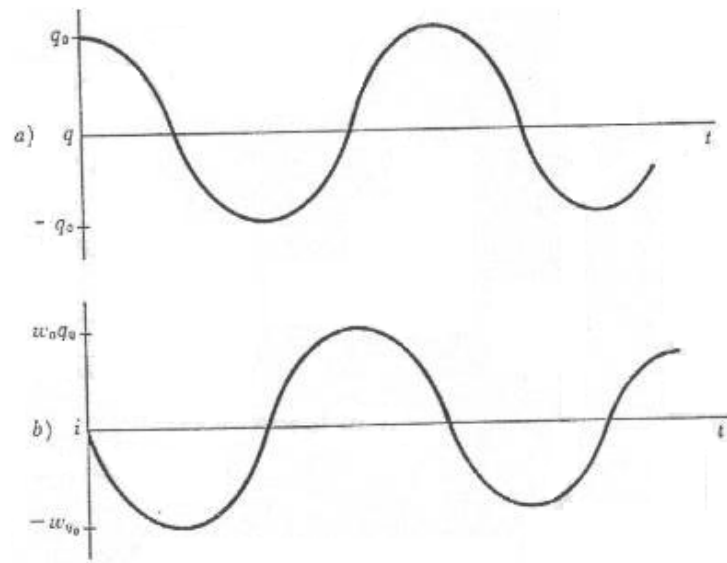
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

entonces:

$$U_T = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{c} (\cos^2 \omega t + \operatorname{sen}^2 \omega t) = \frac{q_0^2}{2c}$$

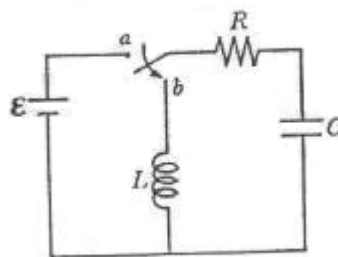
como era de esperarse.

En la Fig. se grafican las ecuaciones (9.17) y (9.20) para damos una mejor idea de la variación de la corriente y la carga en un circuito LC ideal.



9.7. Circuitos RLC

Si en el circuito LC se incluye una resistencia como se muestra en la Fig., entonces la energía almacenada en el condensador al pasar el interruptor de “a” a “b” parte de la energía almacenada por éste, se disipa en la resistencia por el efecto Joule y el resto se almacena en el inductor, una vez que se descarga completamente el condensador, entonces el inductor comienza a descargar su energía nuevamente y parte se disipa en la resistencia y el resto se almacena en el condensador y así periódicamente, hasta que toda la energía que inicialmente tenía el condensador se disipa totalmente en la resistencia.



Para encontrar la ecuación diferencial del circuito RLC se aplica la segunda Ley de Kirchhoff, considerando que el condensador está cargado, el voltaje en el condensador es igual a la suma de caídas de voltaje en la resistencia y la inductancia, esto es:

$$\frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt} - iR$$

reemplazando $i = \frac{dq}{dt}$ nos queda la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (9.21)$$

La Ec. 9(21) difiere de la Ec. (9.16) en el término de primer orden que se debe a la resistencia.

La solución de la Ec. (9.21) y que va de acuerdo a lo que se palntea al iniciar la sección, es de la siguiente forma:

$$q = q_0 e^{-\alpha t} \cos \omega' t \quad (9.22)$$

Las constantes α y ω' se escogen de acuerdo a que satisfagan la ecuación diferencial del problema en cuestión. Las constantes α y ω' están dadas por:

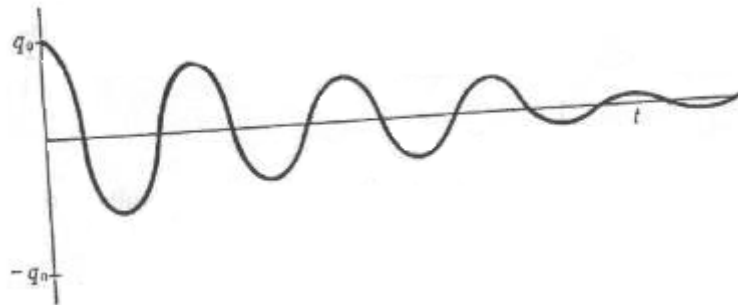
$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

y:

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

como se puede observar que si el valor de R es cero, entonces, se tiene un circuito LC.

De la Ec. (9.22) vemos que a mayor resistencia en el circuito la carga decrece más rápidamente contra el tiempo como se ve en la Fig. que es la gráfica de la Ec. (9.22).



A esta condición se le denomina bajo amortiguamiento. Si el circuito RCL , se le conecta a una fuente en serie, de tal firma que suministre la energía que disipa la resistencia, a esta condición se conoce con el nombre de críticamente amortiguado; si la amplitud en el circuito RCL , va aumentando debido a que se está dando más energía al circuito de la que consume, entonces se tiene un sobreamortiguamiento.

Problemas resueltos

Problema 9.1

Para una bobina (solenoides) de sección cuadrada, de lado 2 [cm] con 400 vueltas y 20 [cm] de longitud. Determine su inductancia.

Solución:

De la ecuación (9.4) se tiene que:

$$L = n^2 \mu_0 A l$$

como,

$$N = n l$$

entonces:

$$L = \frac{N^2 \mu_0 A}{l}$$

sustituyendo valores:

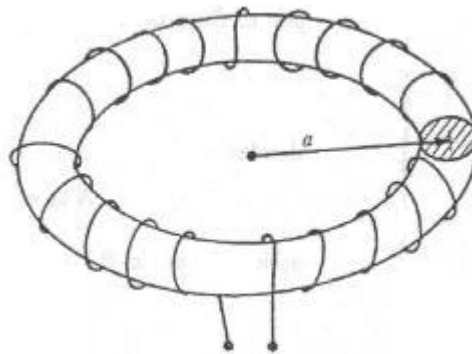
$$L = \frac{(400)^2 (4\pi \times 10^{-7})(0.02m)^2}{0.2}$$

efectuando operaciones:

$$L = 128 \pi [\mu H.]$$

Problema 9.2

Calcule la inductancia de una bobina toroidal de N vueltas de sección transversal circular de área A y con un radio medio a , como se muestra en la Fig. (Considere que el radio medio es mucho mayor que el radio de la sección transversal).



Solución:

De la Ley de Ampere, ecuación 7.2:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

obtenemos:

$$B 2\pi a = \mu_0 i N$$

donde N es el número de vueltas, e i la corriente en el embobinado. El flujo que atraviesa cada vuelta es:

$$\phi_B = BA = \frac{\mu_0 i N A}{2 \pi a}$$

el flujo total es el que pasa por las N vueltas:

$$\phi_B = \frac{\mu_0 i N^2 A}{2 \pi a}$$

de la Ec. (9.3) obtenemos la inductancia, esto es:

$$L = \frac{d\phi_B}{di} = \frac{\mu_0 i N^2 A}{2 \pi a}$$

Ejemplo 9.3

Determine la energía almacenada por un toroide de 10.000 vueltas, con una longitud media de 2 m, y una sección transversal de 20 [cm²], si la corriente que entra al toroide es de 20 amperes.

Solución:

En el problema 92 se encontró que la inductancia de un toroide es:

$$L = (\mu_0 N^2 A) / l$$

donde l es la longitud media o $2 \pi a$.

Para el cálculo de la energía almacenada usamos la ecuación 9.6:

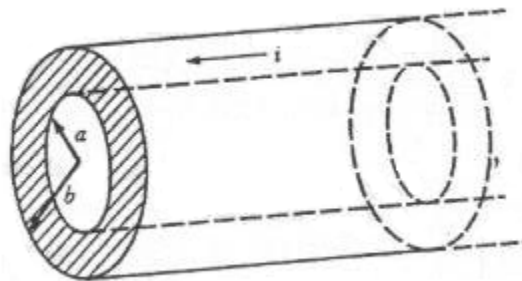
$$U_B = W_B = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 N^2 A}{l} \right) i^2$$

Sustituyendo valores:

$$U_B = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi \times 10^{-7} \text{ tesla} \cdot \text{m/ampere} \times 10^8 \times 20 \times 10^{-4} \text{ m}^2}{2\text{m}} \right) i^2$$

Problema 9.4

Determine la densidad de energía del campo magnético para a) $r < a$, b) $a < r < b$ y c) $r > b$, en un conductor muy largo, cilindro de radio b con una cavidad cilíndrica de radio a , como se muestra en la Fig., que lleva una corriente i .



Solución:

a) Aplicando la Ley de Ampere, Ec. (7.2), se ve que para cualquier trayectoria circular cerrada la corriente encerrada es cero, y por lo tanto el campo el campo es cero y por consiguiente la densidad de energía para $r < a$ es cero.

b) De la Ley de Ampere, Ec. (7.3),

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint J ds$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 J \iint ds \quad ; \quad J = \frac{I}{A} = \frac{I}{\pi (b^2 - a^2)}$$

evaluando lo anterior

$$B 2\pi r = \mu_0 I \frac{\pi (r^2 - a^2)}{\pi (b^2 - a^2)}$$

despejando el campo magnético:

$$B = \frac{\mu_0 I (r^2 - a^2)}{2\pi r (b^2 - a^2)}$$

para obtener la densidad de energía usamos la Ec. (9.6) y sustituimos el campo magnético:

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 (r^2 - a^2)^2}{8\pi^2 r^2 (b^2 - a^2)^2}$$

b) Para calcular u_B para $r > b$, de la Ley de Ampere tenemos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

evaluando:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Sustituyendo en la Ec. (9.6) obtenemos la densidad de energía, esto es:

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

Problema 9.5

Calcule la energía almacenada por unidad de longitud para a) $r < a$, b) $a < r < b$ para el problema 9.4

Solución:

a) Como $u_B = 0$ para $r < a$, entonces la energía almacenada por unidad de longitud es cero.

b) La energía almacenada por unidad de longitud la obtenemos de la integral de la densidad de energía por un diferencial de volumen, esto es:

$$U = W = \iiint u_B \, dV$$

donde $dV = 2\pi r l \, dr$ para un cilindro y sustituyendo por el valor de u_B del problema 9.4 b) se tiene que:

$$U = \int_a^b \frac{\mu_0 I^2 (r^2 - a^2)^2}{8\pi^2 r^2 (b^2 - a^2)^2} \frac{2\pi r l \, dr}{r^2} = \int_a^b \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi (b^2 - a^2)^2} \left(r - \frac{a^2}{r}\right)^2 r \, dr$$

$$U = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi (b^2 - a^2)^2} \int_a^b \left(r^3 - 2a^2 r + \frac{a^4}{r}\right)^2 \, dr$$

Integrando y evaluando:

$$U = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi (b^2 - a^2)^2} \left[\frac{r^4}{4} - \frac{2a^2 r^2}{2} + a^4 \operatorname{Ln} r \right]_a^b$$

$$U/l = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi (b^2 - a^2)^2} \left[\frac{b^4 - a^4}{4} - a^2 b^2 + a^4 \left(1 + \operatorname{Ln} \frac{b}{a}\right) \right]$$

Problema 9.6

Calcule la inductancia por unidad de longitud, del conductor del problema 9.4.

Solución:

De la Ec. (9.5) tenemos que:

$$W_B = \frac{1}{2} LI^2 \quad \text{de donde} \quad L = \frac{2W_B}{I^2}$$

en el problema 9.5 se encontró W_B para $a < r < b.$, que es igual a:

$$W_B = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi(b^2 - a^2)^2} \left[\frac{b^4 - a^4}{4} - a^2 b^2 + a^4 \left(1 + Ln \frac{b}{a} \right) \right]$$

Sustituyendo en la Ec. (9.5) y despejando la inductancia por unidad de longitud, se tiene que:

$$L/l = \frac{\mu_0}{4\pi(b^2 - a^2)^2} \left[\frac{b^4 - a^4}{4} - a^2 b^2 + a^4 \left(1 + Ln \frac{b}{a} \right) \right]$$

Observe que si el conductor no fuera hueco, la inductancia por unidad de longitud es independiente del diámetro del conductor.

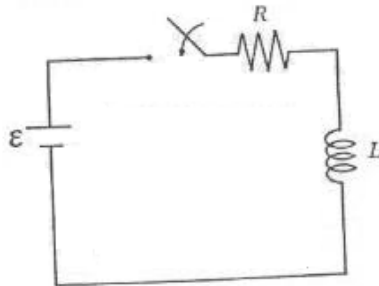
Problema 9.7

En el circuito RL que se muestra en la Fig. determine:

- a) La constante de tiempo inductiva.
- b) La corriente que circula en el circuito para $t = 10 \tau L$.

c) La energía almacenada en la bobina para $t = 2 \tau L$.

Si los valores de $\varepsilon = 10$ [V], $R = 20$ [Ω] y $L = 2$ [mH].



Solución:

a) La constante de tiempo inductiva es $\tau L = L / R$. Sustituyendo valores

$$\tau L = \frac{2 \times 10^{-3} \text{ h}}{20 \text{ ohms}} = 1 \times 10^{-4} \text{ [s]}.$$

b) De la Ec. (9. 9) se tiene:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-t/\tau L} \right)$$

para $t = 10 \tau L$ [s], se puede considerar que e^{-10} es muy pequeño ($e^{-10} \approx 0$), entonces:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = 0.5 \text{ [A]}.$$

c) Primero se calcula la corriente para $t = 2 \tau L$ de la Ec. (9.9) y después se sustituye en la Ec. (9.6) para determinar la energía.

$$I = \varepsilon / R \left(1 - e^{-2\tau L/\tau L} \right) = 0.5 \left(1 - e^{-2} \right) = 0.43 \text{ [A]}.$$

Sustituyendo en la Ec. (9.6) se tiene:

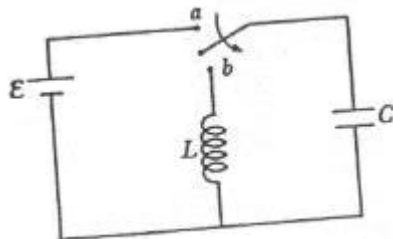
$$W_B = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}(2 \times 10^{-3})(0.43)^2$$

$$W_B = 1.85 \times 10^{-4}$$

Problema 9.8

Para el circuito LC que se muestra en la Fig., $\varepsilon = 8[V]$, $L = 10^{-4}[H]$ y $C = 200 [\mu F]$. Después de estar conectado por mucho tiempo el interruptor en “a” se cambia a “b”, determine:

- La máxima carga almacenada en el condensador.
- La corriente que circula en el circuito cuando las energías almacenadas por el condensador y el inductor son iguales.
- El período de oscilación.



Solución:

- a) De la ecuación (5.1) se tiene:

$$q_0 = CV_0 = 16 \times 10^{-4} [C]$$

- b) De la ecuación (9.14) se puede escribir:

$$W_T = \frac{1}{2} q_0^2 / c = \frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2} q^2 / c$$

como:

$$W_L = W_c$$

entonces:

$$\frac{1}{2} q_0^2 / c = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} q_0^2 / c)$$

despejando:

$$I = q_0 \sqrt{\frac{1}{2LC}} = 8 \text{ [A]}.$$

c) De la ecuación (9.19), se obtiene:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\sqrt{2\pi} \times 10^{-4} \text{ [s]}.$$

CAPÍTULO X

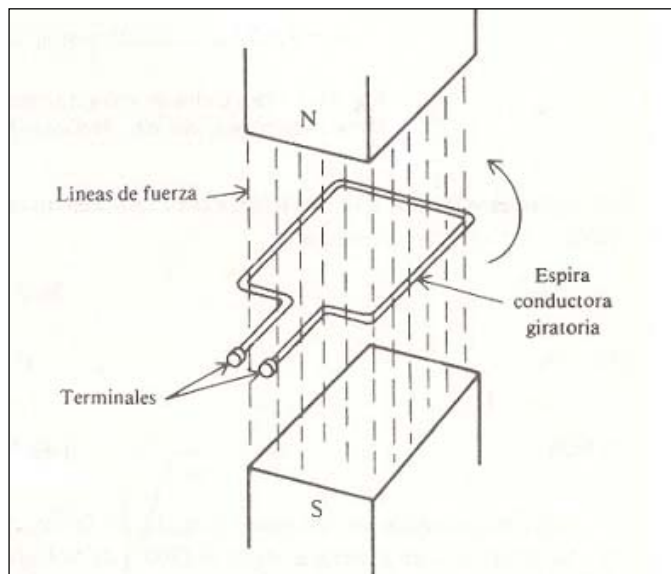
CORRIENTE ALTERNA (CA)

10.1. Introducción

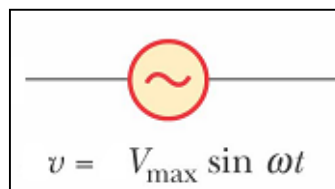
Para generar corriente alterna, se puede considerar el caso de una bobina girando en el interior de un campo magnético con velocidad angular ω constante, esto produce una *fem* sinusoidal en la bobina dada por

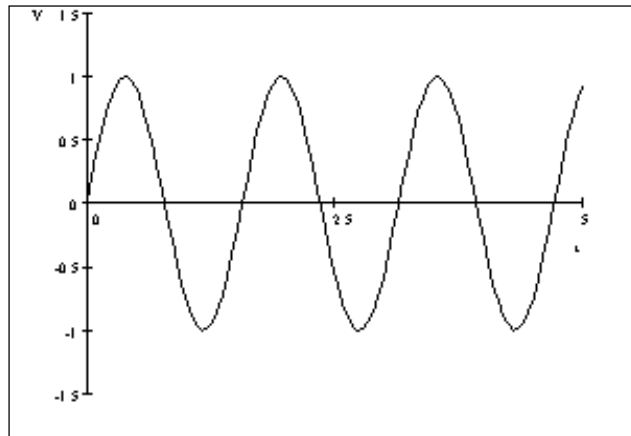
$$V = V_{\max} \sin \omega t$$

donde V_{\max} es e valor máximo de la *fem*



Este tipo de fuente de *fem* convierte la energía mecánica en energía eléctrica, el símbolo que se utiliza para representar una fuente de CA es el siguiente.

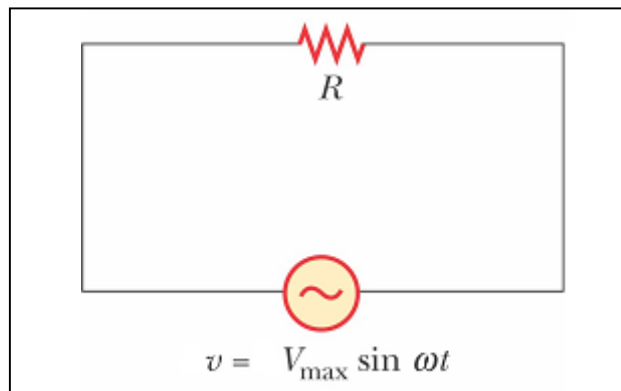




El propósito de este capítulo es estudiar algunos circuitos de CA tales como los que se forman al conectar una fuente de CA a una resistencia (R), a un condensador (C) o a una bobina (L). **El objetivo fundamental en todos estos circuitos es determinar la corriente eléctrica I que circula** (en R , C y L), para posteriormente estudiar un circuito RLC serie.

10.2. Corriente Alterna en una resistencia

El circuito mas sencillo se compone de una resistencia conectada a una fuente de *fem*, tal como se muestra en la figura.



Para determinar la corriente que circula por la resistencia R , se utiliza la Ley de Kirchhoff escrita en la forma $V_{fuente} - V_R = 0$ o $V - IR = 0$

luego $I = \frac{V}{R}$, reemplazando el valor de la *fem* que entrega la fuente se encuentra

$$I_R = \left(\frac{V_{\max}}{R} \right) \sin \omega t$$

Si se define

$$I_{\max} = \left(\frac{V_{\max}}{R} \right)$$

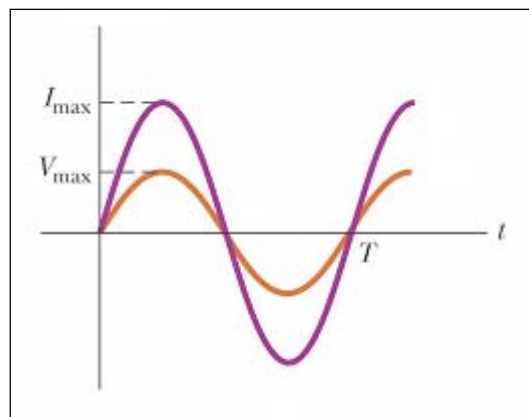
Entonces se puede escribir

$$I = I_{\max} \sin \omega t$$

La diferencia de potencial o tensión en la resistencia está dada por

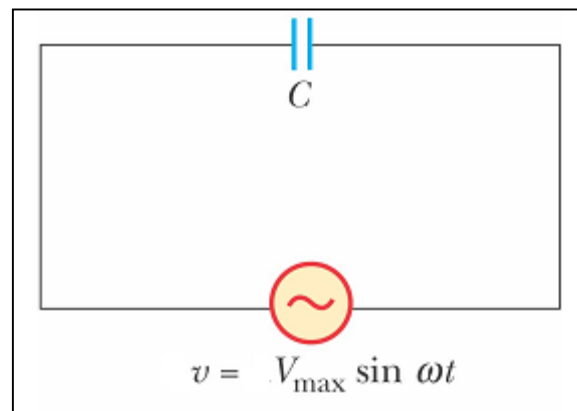
$$V_R = I_{\max} R \sin \omega t$$

Estas dos última expresiones muestran que tanto la corriente que circula como la diferencia de potencial en la resistencia están en fase con la tensión que entrega la fuente, tal como se muestra en la figura en donde se representa: $V_R = f(t)$ curva café, e $I = f(t)$ curva morada.



10.3. Corriente Alterna en un condensador

En la figura se muestra un condensador C conectado a una fuente de CA



Aplicando la Ley de Kirchhoff al circuito de la figura anterior, se tiene que:

$$V_{fuente} - V_C = 0$$

Sustituyendo los valores respectivos se tiene

$$V_{\max} \sin \omega t - \frac{q}{C} = 0$$

luego

$$q = CV_{\max} \sin \omega t$$

Derivando con respecto al tiempo se encuentra que la corriente que circula por el condensador está dada por

$$I = \frac{dq}{dt} = \omega CV_{\max} \cos \omega t$$

o

$$I = \frac{V_{\max}}{1/(\omega C)} \sin(\omega t + \pi/2)$$

Reactancia capacitiva o capacitancia: Se define la reactancia capacitiva como

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

reemplazando se encuentra

$$I = \frac{V_{\max}}{X_C} \sin(\omega t + \pi/2)$$

si se define

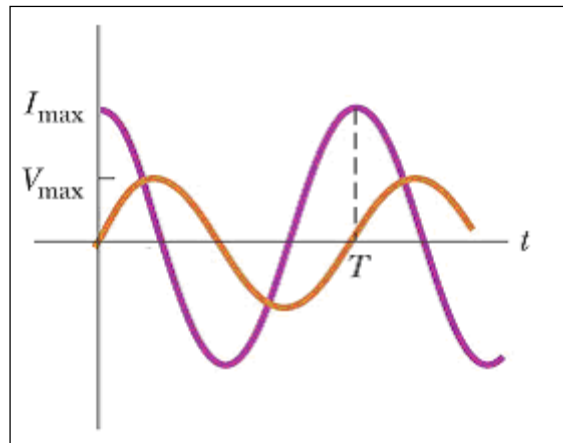
$$I_{\max} = \frac{V_{\max}}{X_C}$$

Entonces

$$I_C = I_{\max} \sin(\omega t + \pi/2)$$

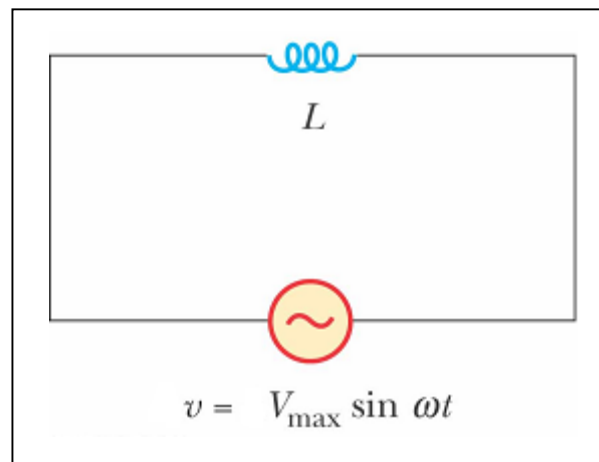
La diferencia de potencial en el condensador se atrasa 90^0 respecto de la corriente que pasa por él.

En la siguiente figura se muestran los gráficos $V_C = f(t)$ curva café, e $I = f(t)$ curva morada.



10.4. Corriente Alterna en una bobina

En la figura se muestra una bobina L conectada a una fuente de CA



Aplicando la Ley de Kirchhoff al circuito de la figura anterior, se tiene que $V_{fuente} - V_L = 0$

donde $V_L = L \frac{dI}{dt}$; Sustituyendo los valores respectivos se tiene $L \frac{dI}{dt} = V_{max} \sin \omega t$

Separando variables e integrando se encuentra

$$\int dI = \frac{V_{max}}{L} \int \sin \omega t dt$$

$$I = -\frac{V_{max}}{\omega L} \cos \omega t \equiv \frac{V_{max}}{\omega L} \sin(\omega t - \pi/2)$$

Reactancia Inductiva o inductancia: Se define la reactancia inductancia como $X_L = \omega L$

reemplazando se encuentra
$$I = \frac{V_{\max}}{X_L} \sin(\omega t - \pi/2)$$

si se define

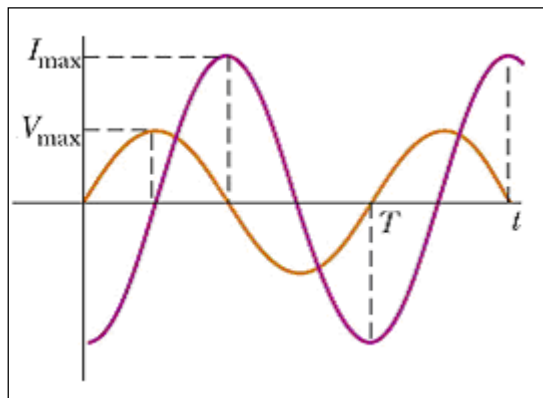
$$I_{\max} = \frac{V_{\max}}{X_L}$$

Entonces

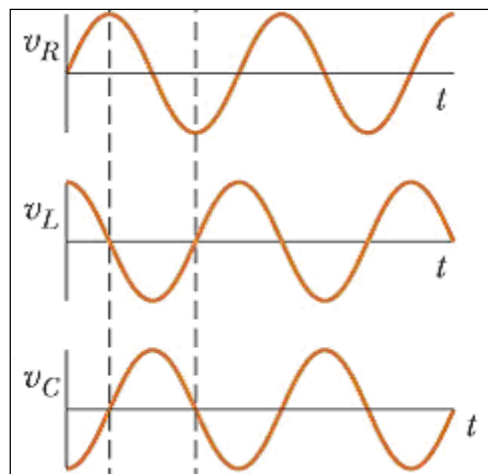
$$I_L = I_{\max} \sin(\omega t - \pi/2)$$

La diferencia de potencial en la bobina se adelanta a la corriente que pasa por ella en 90° .

En la siguiente figura se muestran los gráficos $V_L = f(t)$ curva café, e $I=f(t)$ curva morada

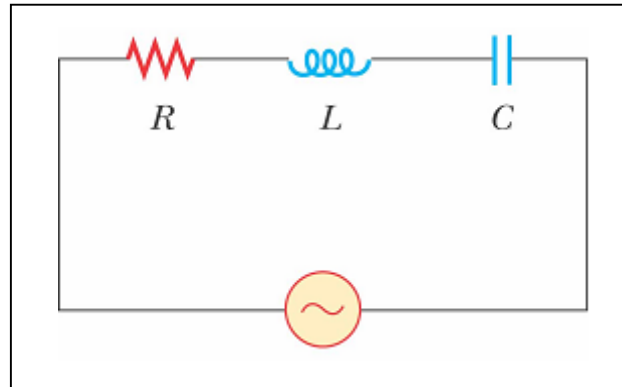


En la siguiente figura se muestra en forma de resumen las diferencias de potenciales en cada uno de los elementos.



10.5. Circuito RLC (Serie)

En la figura se muestra un circuito RLC serie, por tratarse de un circuito serie la corriente que circula es la misma en R , X_L y X_C



Aplicando la Ley de Kirchhoff al circuito, se puede escribir

$$V_R + V_L + V_C = V_{Fuente}$$

donde

$$V_R = RI \equiv R \frac{dq}{dt} \quad \text{es la diferencia de potencial en la resistencia (R)}$$

$$V_L = L \frac{dI}{dt} \equiv L \frac{d^2q}{dt^2} \quad \text{es la diferencia de potencial en la bobina (L)}$$

$$V_C = \frac{q}{C} \quad \text{es la diferencia de potencial en el condensador (C)}$$

$$V_{Fuente} = V_{\max} \sin \omega t \quad \text{es la diferencia de potencial aplicada por la fuente de CA}$$

Sustituyendo los valores anteriores, se encuentra que la ecuación diferencial que describe a un circuito RLC serie está dada por

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_{\max} \sin \omega t$$

La solución de esta ecuación diferencial muestra que la corriente que circula por el circuito puede ser expresada en la forma

$$I = I_{\max} \text{sen}(\omega t - \phi)$$

donde

ϕ representa la diferencia de fase entre el potencial de la fuente y la corriente del circuito, y está definido como

$$\phi = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$$

No obstante que el método de las ecuaciones diferenciales para describir el comportamiento del circuito es correcto, es más conveniente y sencillo utilizar el método de fasores

Diagrama de fasores para $V_L > V_C$

Aunque ni la diferencia de potencial ni la intensidad de corriente son vectores, éstos pueden ser representados por unos vectores bidimensionales que son llamados **fasores**.

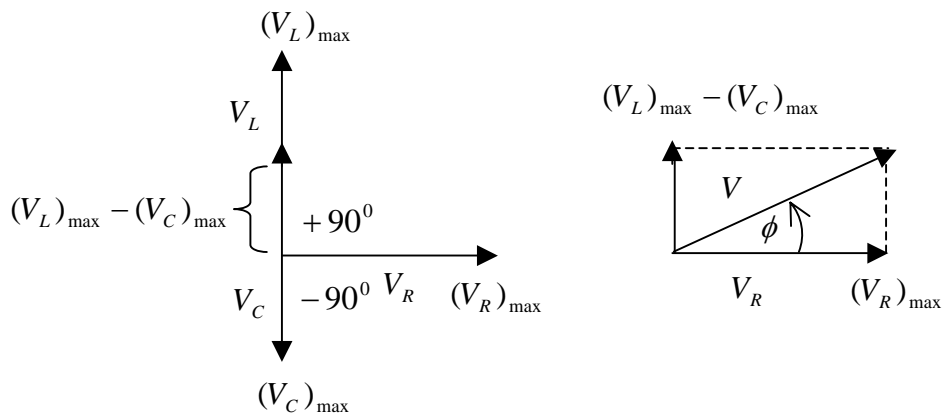
Otra forma de obtener los resultados anteriores es mediante la utilización de fasores, para esto es conveniente escribir la diferencia de potencial en cada elemento (resistencia, bobina y condensador), las cuales al aplicar la ley de Ohm están dadas respectivamente por

$$V_R = IR \quad (\text{Diferencia de potencial en la resistencia})$$

$$V_L = IX_L \quad (\text{Diferencia de potencial en la bobina})$$

$$V_C = IX_C \quad (\text{Diferencia de potencial en el condensador})$$

El diagrama de fasores para $V_L > V_C$, está representado en las siguientes figuras



La diferencia de potencial en la resistencia está en fase con la corriente que pasa por la resistencia (figura anterior lado izquierdo). La diferencia de potencial en la bobina (inductancia) se adelanta a la corriente que pasa por la bobina en 90° . La diferencia de potencial en el condensador se atrasa 90° a la corriente que pasa por el condensador. Cuando $X_L > X_C$ **el circuito es inductivo**, $V_L > V_C$. En esta caso la corriente I se adelanta a V .

De la figura anterior (lado derecho), según el teorema de Pitágoras se tiene que

$$V_{\max} = \sqrt{(V_R)_{\max}^2 + [(V_L)_{\max} - (V_C)_{\max}]^2}$$

Reemplazando lo valores máximos respectivos se tiene

$$V_{\max} = I_{\max} \sqrt{(I_{\max} R)^2 + (I_{\max} X_L - I_{\max} X_C)^2}$$

También de esta misma figura se encuentra que

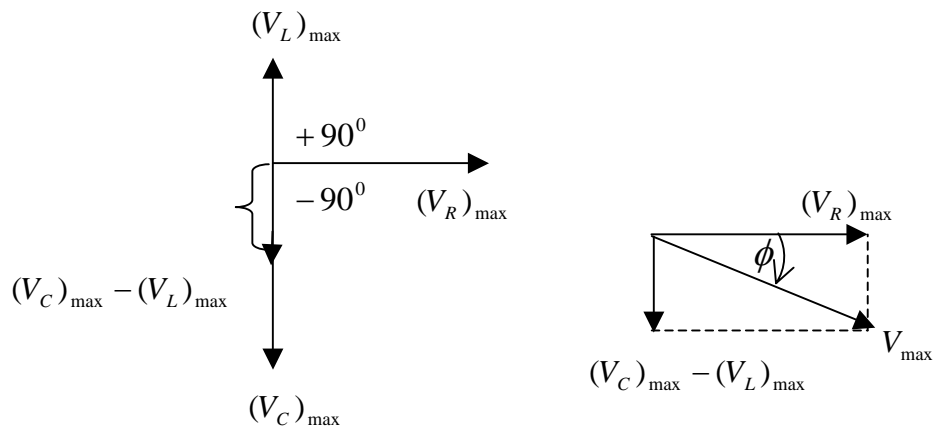
$$\phi = \arctan\left(\frac{(V_L)_{\max} - (V_C)_{\max}}{(V_R)_{\max}}\right)$$

ecuación que es equivalente a

$$\phi = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$$

Diagrama de fasores para $V_C > V_L$

Cuando $X_C > X_L$ **el circuito es capacitivo**, $V_C > V_L$. En esta caso la corriente I se atrasa a ΔV (ver figura)



Cuando $X_C > X_L$, se encuentra que

$$V_{\max} = \sqrt{(V_R)_{\max}^2 + [(V_C)_{\max} - (V_L)_{\max}]^2}$$

$$\phi = \arctan\left(-\frac{(V_C)_{\max} - (V_L)_{\max}}{(V_R)_{\max}}\right)$$

El ángulo de fase puede ser positivo o negativo que es lo que determina la naturaleza del circuito

$$V_{\max} = I_{\max} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Impedancia (Z). La impedancia se define como

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

teniendo presente las definiciones de las reactancias

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad \text{y} \quad X_L = \omega L$$

se tiene

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Reactancia del circuito: la cantidad $(X_L - X_C)$ recibe el nombre de reactancia del circuito y se representa por X

$$X = X_L - X_C$$

Entonces la impedancia se puede escribir en términos de la reactancia del circuito en la forma

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Por otro lado, ecuaciones anteriores puede escribir

$$V_{\max} = I_{\max} Z$$

$$I_{\max} = \frac{V_{\max}}{Z}$$

10.6. Resonancia

Una característica útil de un circuito RLC serie conectado a una fuente de CA es el fenómeno de resonancia. Por otro lado, teniendo presente la ecuación para la amplitud de la corriente

$$I_{\max} = \frac{V_{\max}}{Z} \equiv \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

donde $X_C = \frac{1}{\omega C}$ y $X_L = \omega L$, es fácil ver que existe una frecuencia para cual $X_C = X_L$,

que hace mínima la impedancia $Z = \sqrt{R^2 + 0^2} = R$. Esta frecuencia recibe el nombre de **frecuencia angular de resonancia** se representa por ω_0 y se define a partir de

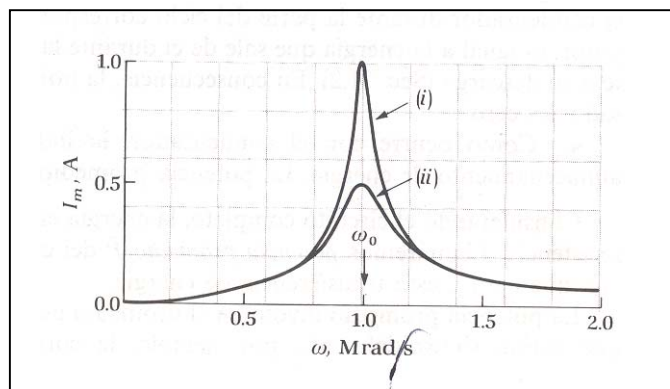
$$X_C = X_L \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\omega_0 C} = \omega_0 L$$

Luego
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Cuando $\omega = \omega_0$ la amplitud de la corriente tiene su máximo valor dado por $I_{\max} = \frac{V_{\max}}{R}$.

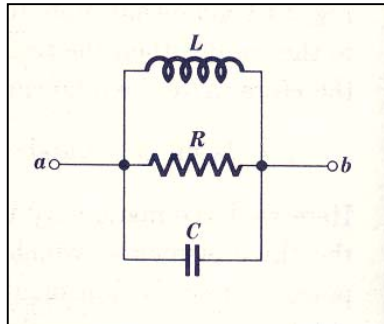
También es importante destacar que ω_0 se conoce como **frecuencia natural** del circuito.

En la siguiente figura se muestra $I_{\max} \equiv I_m = f(\omega)$ para dos circuitos RLC en serie, conectado a una fuente de CA, (i) $R = 100[\Omega]$ e (ii) $R = 200[\Omega]$, para ambos circuitos se tiene que: $V_{\max} = 100[V]$, $L = 1.0[mH]$ y $C = 1.0[nF]$



10.7. Circuito RLC (paralelo)

En la figura se muestra un circuito *RLC* paralelo



En este circuito el potencial en cada elemento es el mismo (en fase y amplitud), esto requiere que las corrientes sean diferentes. Las amplitudes de las corrientes individuales están dadas por

$$(I_{\max})_R = \frac{V_{\max}}{R}$$

$$(I_{\max})_C = \frac{V_{\max}}{1/(\omega C)}$$

$$(I_{\max})_L = \frac{V_{\max}}{\omega L}$$

La magnitud de la corriente se determina utilizando la relación

$$I_{\max} = |(I_{\max})_R + (I_{\max})_C + (I_{\max})_L|$$

Sustituyendo los valores respectivos (teniendo presente el diagrama de fasores), se encuentra

$$I_{\max} = \frac{V_{\max}}{Z}$$

donde

$$\frac{1}{Z} = \left[\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^2 \right]^{1/2}$$

notamos que los signos de X_C y X_L están cambiados en comparación con los del circuito serie. Esto resulta debido a que las fases de los potenciales son iguales para el circuito

paralelo comparadas con fases iguales de la corriente para el caso serie en donde se cumple que

$$[I_{\max} = (I_{\max})_R = (I_{\max})_C = (I_{\max})_L]_{SERIE}$$

La corriente para el circuito RLC paralelo viene dada por

$$I = I_{\max} \sin(\omega t - \phi)$$

donde

$$\theta = \arctan\left(\frac{1/X_C - 1/X_L}{1/R}\right)$$

10.8. Potencia en circuito de corriente alterna

La potencia instantánea para el circuito RLC serie está dada por

$$P = VI$$

donde $V = V_{\max} \sin \omega t$ e $I = I_{\max} \sin(\omega t - \phi)$, Reemplazando estos valores se encuentra

$$P = (V_{\max} \sin \omega t) I_{\max} \sin(\omega t + \phi)$$

$$P = V_{\max} I_{\max} \sin \omega t (\sin \omega t \cos \phi - \sin \phi \cos \omega t)$$

$$P = V_{\max} I_{\max} (\sin^2 \omega t \cos \phi - \sin \omega t \cos \omega t \sin \phi)$$

Promediando temporalmente se tiene que la potencia media está dada por

$$\langle P \rangle \equiv P_m = \langle V_{\max} I_{\max} (\sin^2 \omega t \cos \phi - \sin \omega t \cos \omega t \sin \phi) \rangle$$

Por otro lado, sabiendo que el promedio temporal de una función $f(t)$, está dada por

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) dt$$

se encuentra que

$$\langle \sin^2 \omega t \rangle = \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega t) \right\rangle \equiv \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega t) \right) dt$$

Integrando se encuentra

$$\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$

De igual forma se obtiene que $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$

Luego
$$P_m = \frac{1}{2} V_{\max} I_{\max} \cos \phi$$

10.9. Valores efectivos o rms para la corriente y el potencial

Generalmente cuando se especifica un valor de potencial alterno o de corriente alterna, se trata de del valor cuadrático medio (rms), los voltímetros y amperímetros de alterna, están calibrados para indicar estos valores

La raíz cuadrada del valor medio del cuadrado de la corriente corresponde a I_{rms} o $I_{efectivo}$, entonces

$$I_{rms} \equiv \sqrt{\langle I^2 \rangle} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Del mismo modo se puede obtener

$$V_{rms} \equiv \sqrt{\langle V^2 \rangle} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Los valores efectivos o rms (root mean square) que en español representa a la “raíz cuadrática media” indica que se trata de la de la **raíz cuadrada del valor medio del cuadrado de la corriente o del potencial.**

El valor instantáneo de I^2 está dado por

$$I^2 = (I_{\max})^2 \sin^2(\omega t - \phi)$$

El valor medio del cuadrado de la corriente se expresa como

$$\langle I^2 \rangle = \langle (I_{\max})^2 \sin^2(\omega t + \phi) \rangle = (I_{\max})^2 \langle \sin^2(\omega t - \phi) \rangle$$

como $\langle \sin^2(\omega t - \phi) \rangle = \frac{1}{2}$, se encuentra

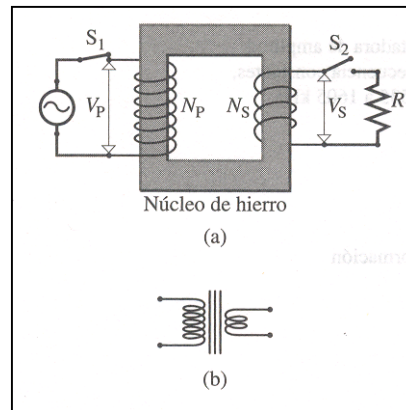
$$I_{rms} \equiv \sqrt{\langle I^2 \rangle} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

En forma análoga se encuentra

$$V_{rms} \equiv \sqrt{\langle V^2 \rangle} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$$

10.10. Transformadores

Un transformador de corriente alterna es un dispositivo de inducción que está compuesto por dos bobinas de alambre devanadas en un núcleo de hierro, tal como se muestra en la figura.



La bobina de la izquierda tiene N_p vueltas y se denomina **primario**, esta bobina se conecta a la fuente de voltaje o potencial alterno. La bobina de la derecha recibe el nombre de **secundario**, está formada por N_s vueltas y se conecta a una resistencia de carga R .

La misión que cumple el núcleo de hierro es aumentar el flujo magnético que pasa por la bobina, y proporcionar un medio en el cual casi todo el flujo que pase por una bobina pase también por la otra. De la Ley de Faraday se puede escribir

$$V_p = -N_p \frac{d\Phi_B}{dt}$$

donde Φ_B es el flujo magnético que pasa por cada vuelta, asumiendo que el flujo que atraviesa cada vuelta del primario es el mismo que pasa por cada vuelta del secundario, se tiene

$$V_s = -N_s \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Despejando $\frac{d\Phi_B}{dt}$ de una de las ecuaciones y reemplazándola en la otra se encuentra

$$V_s = \frac{N_s}{N_p} V_p$$

Transformador de subida o elevador:

Cuando $N_S > N_P$, se obtiene que $V_S > V_P$, entonces se tiene un transformador elevador

Transformador de bajada o reductor:

Cuando $N_S < N_P$, se tiene que $V_S < V_P$ (transformador de bajada)

En la figura anterior, letra b) se muestra un diagrama de circuito para un transformador.

10.11. Problemas resueltos

Problema 10.1

A partir de $V = V_R + V_L + V_C$. Demuestre que la diferencia de potencial entre los elementos R , L y C se puede escribir en la forma: $V = V_{\max} \sin(\omega t - \phi)$ y que la corriente toma la forma

$$I = I_{\max} \sin \omega t \quad \text{donde} \quad V_{\max} = I_{\max} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \text{y} \quad \phi = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right).$$

Solución:

Sabiendo que

$$V_R = I_{\max} R \sin \omega t \quad ; \quad V_L = I_{\max} X_L \sin(\omega t - \pi/2) \quad ; \quad V_C = I_{\max} X_C \sin(\omega t + \pi/2)$$

Escribamos las diferencias de potenciales en forma genérica como sigue:

$$V_1 = A_1 \text{sen}(\omega t + \phi_1) \quad ; \quad V_2 = A_2 \text{sen}(\omega t + \phi_2) \quad ; \quad V_3 = A_3 \text{sen}(\omega t + \phi_3)$$

$$\text{Donde: } A_1 = I_{\max} R \quad ; \quad A_2 = I_{\max} X_L \quad ; \quad A_3 = I_{\max} X_C$$

$$\phi_1 = 0 \quad ; \quad \phi_2 = -\pi/2 \quad ; \quad \phi_3 = \pi/2$$

Por simplicidad determinemos primero

$$V_{12} = V_1 + V_2$$

sustituyendo y aplicando la propiedad $\text{sen}(\beta + \phi) = \text{sen}\beta \cos \phi + \text{sen}\phi \cos \beta$, se tiene

$$V_{12} = A_1 (\text{sen}\omega t \cos \phi_1 + \text{sen}\phi_1 \cos \omega t) + A_2 (\text{sen}\omega t \cos \phi_2 + \text{sen}\phi_2 \cos \omega t)$$

factorizando

$$V_{12} = (A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2) \text{sen} \omega t + (A_1 \text{sen} \phi_1 + A_2 \text{sen} \phi_2) \cos \omega t$$

definiendo

$$A \cos \phi = A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 \quad (*)$$

$$A \text{sen} \phi = A_1 \text{sen} \phi_1 + A_2 \text{sen} \phi_2 \quad (**)$$

elevando al cuadrado las ecuaciones anteriores y luego sumando, se obtiene

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)$$

dividiendo (*) y (**) se encuentra

$$\tan \phi = \frac{A_1 \text{sen} \phi_1 + A_2 \text{sen} \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}$$

con lo cual la ecuación de la onda resultante se puede escribir en la forma

$$V_{12} = A \text{sen}(\omega t - \phi)$$

Para el caso general que se considere un número superior a dos funciones sinusoidales se puede escribir

$$\tan \phi = \frac{\sum_i A_i \text{sen} \phi_i}{\sum_i A_i \cos \phi_i}$$

$$A^2 = \sum_i A_i^2 + 2 \sum_i \sum_j A_i A_j \cos(\phi_j - \phi_i)$$

Teniendo presente el desarrollo anterior, para el caso de tres funciones sinusoidales se tiene lo siguiente

$$V = V_{\max} \text{sen}(\omega t - \phi)$$

donde

$$V_{\max}^2 \equiv A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) + 2A_2A_3 \cos(\phi_3 - \phi_2)$$

$$\tan \phi = \frac{A_1 \text{sen} \phi_1 + A_2 \text{sen} \phi_2 + A_3 \text{sen} \phi_3}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 + A_3 \cos \phi_3}$$

Sustituyendo los valores respectivo se encuentra

$$V_{\max}^2 = (I_{\max} R)^2 + (I_{\max} X_L)^2 + (I_{\max} X_C)^2 + 2I_{\max}^2 X_L R \cos(-\pi/2) + 2I_{\max}^2 X_L X_C \cos(\pi)$$

$$V_{\max}^2 = (I_{\max} R)^2 + (I_{\max} X_L)^2 + (I_{\max} X_C)^2 - 2I_{\max}^2 X_L X_C$$

$$V_{\max}^2 = (I_{\max} R)^2 + (I_{\max} X_L - I_{\max} X_C)^2$$

Luego

$$V_{\max} = I_{\max} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Sustituyendo los respectivos valores en la expresión para el ángulo, se encuentra que la fase está dada por

$$A_1 = I_{\max} R \quad ; \quad A_2 = I_{\max} X_L \quad ; \quad A_3 = I_{\max} X_C$$

$$\phi_1 = 0 \quad ; \quad \phi_2 = -\pi/2 \quad ; \quad \phi_3 = \pi/2$$

$$\tan \phi = \frac{I_{\max} R \operatorname{sen} 0 + I_{\max} X_L \operatorname{sen}(-\pi/2) + I_{\max} X_C \operatorname{sen}(\pi/2)}{I_{\max} R \cos 0}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{|X_L - X_C|}{R}\right)$$

Problema: 10.2

En un circuito RLC en serie $R = 512[\Omega]$, $L = 193[mH]$, $C = 19.3[\mu F]$, un generador de CA a $70 [Hz]$ entrega al circuito una corriente máxima (pico) de $313[mA]$.

- Determine el voltaje máximo (pico) requerido.
- Calcule el ángulo con el cual la corriente en el circuito se adelanta o atrasa respecto al voltaje aplicado.

Solución:

- El voltaje máximo está dado por $V_{\max} = I_{\max} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

En este caso

$$I_{\max} = 313[mA], \quad X_L = \omega L \quad (\omega = 2\pi\nu \ ; \ \nu = 70[Hz]), \quad X_C = 1/(C\omega)$$

Sustituyendo los valores respectivos, se encuentra

$$V_{\max} = 160.6[V]$$

b) El se determina a partir de

$$\phi = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$$

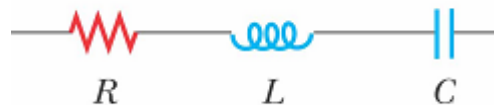
Luego

$$\phi = -3.68^\circ$$

Dado que el ángulo de fase es negativo, significa que la corriente se adelanta con respecto al voltaje.

Problema 10.3

Un generador de CA con $V_{\max} = 412[V]$ y $\nu = 82[Hz]$ se conecta a los extremos del sistema que se muestra en la figura



$$(R = 82[\Omega], L = 270[mH], C = 11[\mu F]).$$

Determine los siguientes voltajes máximos (picos).

- a) $(V_R)_{\max}$
- b) $(V_L)_{\max}$
- c) $(V_C)_{\max}$
- d) $(V_{LC})_{\max}$

Solución:

Primero determinemos los valores de las reactancias $X_L = \omega L$ y $X_C = 1/(C\omega)$ dado que $\omega = 2\pi\nu$, se tiene

$$X_L = 2\pi\nu L = 139.11[\Omega] \quad ; \quad X_C = 1/(2\pi\nu C) = 176.45[\Omega]$$

La impedancia es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 90.10[\Omega]$$

La corriente máxima está dada por

$$I_{\max} = \frac{V_{\max}}{Z} = 4.57[\text{A}]$$

a) La diferencia de potencial en la resistencia se determina a partir de

$$(V_R)_{\max} = I_{\max} R = 374,74[\text{V}]$$

b) La diferencia de potencial en la bobina viene dada por

$$(V_L)_{\max} = I_{\max} X_L = 635.73[\text{V}]$$

c) La diferencia de potencial en el condensador viene dada por

$$(V_C)_{\max} = I_{\max} X_C = 806.38[\text{V}]$$

d) La diferencia de potencial entre el extremo izquierdo de la bobina y extremo derecho del condensador viene dada por

$$(V_{LC})_{\max} = \sqrt{[(V_L)_{\max} - (V_C)_{\max}]^2} = |(V_L)_{\max} - (V_C)_{\max}|$$

$$(V_{LC})_{\max} = |635.73 - 806.38|[\text{V}] = 170.65[\text{V}]$$

Comentario: Es fácil ver que la diferencia de potencial entre los extremos del circuito esta dada por

$$V_{\max} = \sqrt{(V_R)_{\max}^2 + [(V_L)_{\max} - (V_C)_{\max}]^2}$$

Sustituyendo valores se encuentra (aproximadamente) el valor que entrega la fuente

$$V_{\max} = \sqrt{(374.74)^2 + (170.65)^2} = 411.77[\text{V}]$$

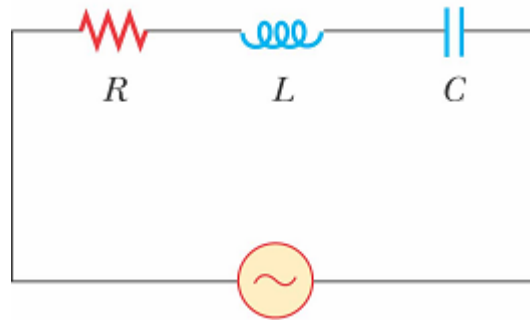
Problema 10.4

Para el circuito de la figura, la salida del generador está dada por $V(t) = 31.4 \sin(350t)[\text{V}]$.

Determine:

- La potencia promedio entregada al circuito por la fuente de poder.
- La potencia promedio disipada por la resistencia.

Los datos son: ($R = 45.2[\Omega]$, $L = 17.2[mH]$, $C = 6.23[\mu F]$),



Solución:

a) Dado que $V(t) = 31.4 \sin(350t)[V]$, se tiene que: $V_{\max} = 31.4[V]$, $\omega = 350$

Reemplazando los valores de $X_L = \omega L$, $X_C = 1/(\omega C)$ y R se encuentran los siguientes resultados

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 452.64[\Omega]$$

$$I_{\max} = \frac{V_{\max}}{Z} = 69.37 \times 10^{-3} [A]$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = -84.3^\circ$$

La potencia promedio está dada por

$$P_m = \frac{1}{2} I_{\max} V_{\max} \cos \phi$$

Sustituyendo valores se encuentra

$$P_m = \frac{1}{2} (69.37 \times 10^{-3})(41.4) \cos(-84.3)[mW] = 108.17[mW]$$

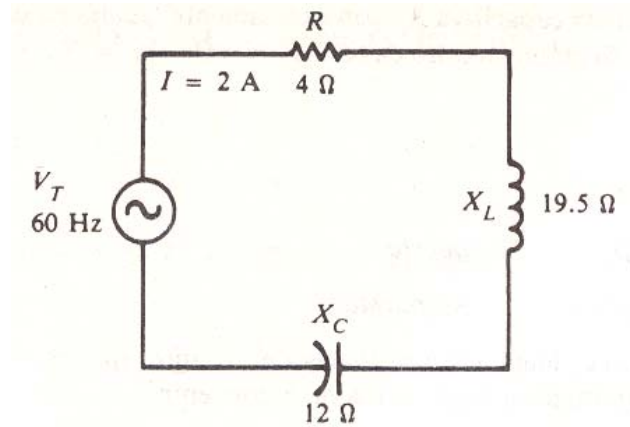
b) Dado que la potencia entregada al circuito se consume únicamente en la resistencia por efecto Joule, entonces la potencia promedio disipada por la resistencia es

$$(P_m)_R = 108.17[mW]$$

Problema 10.5

Para el circuito *RLC* serie de la figura. Determine:

- a) El voltaje aplicado ($V_T = V_{\max}$)
- b) El ángulo de fase
- c) El diagrama de fasores de voltaje (Dibuje)



Solución:

- a) El voltaje aplicado esta dado por

$$V_{\max} = \sqrt{(V_R)_{\max}^2 + [(V_L)_{\max} - (V_C)_{\max}]^2}$$

En esta caso se tiene que

$$V_T = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$$

donde

$$V_R = IR = (2A)(4\Omega) = 8[V]$$

$$V_L = IX_L = (2A)(19.5\Omega) = 39[V]$$

$$V_C = IX_C = (2A)(12\Omega) = 24[V]$$

Reemplazando, se encuentra

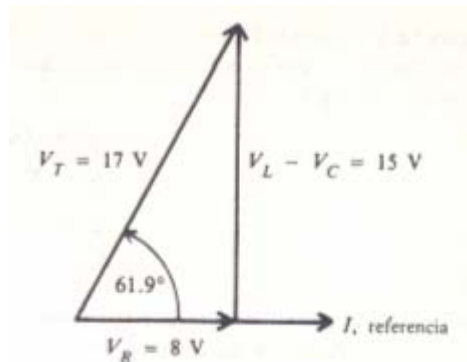
$$V_T = \sqrt{8^2 + (39 - 24)^2} [V] = 17[V]$$

- b) Utilizando la ecuación para el ángulo de fase $\phi = \arctan\left(\frac{V_L - V_C}{V_R}\right)$

Se obtiene
$$\phi = \arctan\left(\frac{39-24}{8}\right) = \arctan(1.88) = 61.9^\circ$$

Luego I se atrasa con respecto a V_T

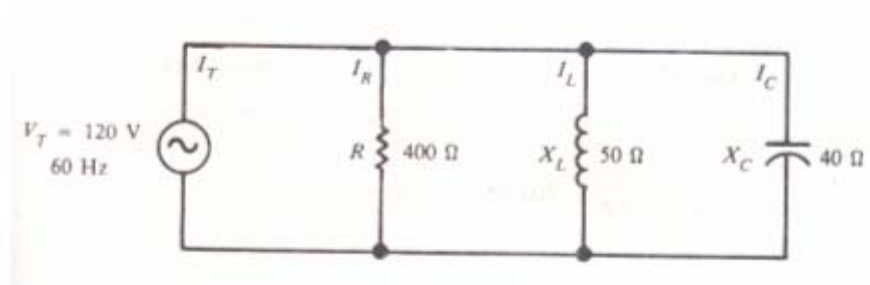
c) Teniendo presente los resultados anteriores, el diagrama de fasores para el voltaje está dado por la siguiente figura



Problema 10.6

Una resistencia de $R = 400[\Omega]$, una reactancia inductiva de $X_L = 50[\Omega]$ y una reactancia capacitiva de $X_C = 40[\Omega]$ se conectan en paralelo a una línea de CA $V_T = 120[V]$, tal como se muestra en la figura: Determine:

- a) Los fasores de las corrientes en cada rama.
- b) La corriente total.
- c) El ángulo de fase y la impedancia Z .
- d) Diagrama de favores.



Solución:

a) Las corrientes respectivas, están dadas por:

$$(I_{\max})_R = \frac{V_{\max}}{R} \quad ; \quad (I_{\max})_L = \frac{V_{\max}}{X_L} \quad ; \quad (I_{\max})_C = \frac{V_{\max}}{X_C}$$

Para este caso se puede escribir

$$I_R = \frac{V_T}{R} = \frac{120V}{400\Omega} = 0.3[A]$$

$$I_L = \frac{V_T}{X_L} = \frac{120V}{50\Omega} = 2.4[A]$$

$$I_C = \frac{V_T}{X_C} = \frac{120V}{40\Omega} = 3.0[A]$$

b) Dado que el circuito es capacitivo ($X_L > X_C$). A partir de la expresión

$$I_{\max} = \sqrt{(I_{\max})_R^2 + [(I_{\max})_C - (I_{\max})_L]^2}$$

se obtiene

$$I_T = \sqrt{(0.3)^2 + (3.0 - 2.4)^2} [A] = 0.671[A]$$

c) Utilizando la relación $\theta = \arctan\left(\frac{I_C - I_L}{I_R}\right)$

se encuentra que el ángulo de fase es

$$\theta = \arctan\left(\frac{3.0 - 2.4}{0.3}\right)$$

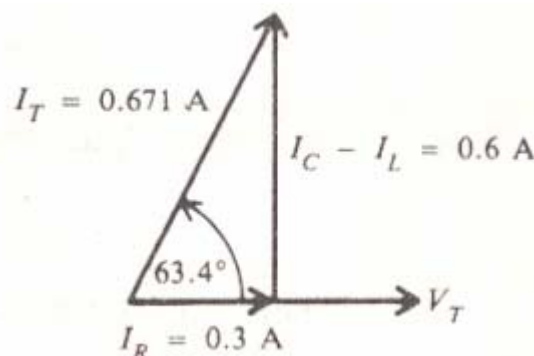
$$\theta = 63.4^\circ$$

Luego I se adelanta a con respecto a V_T

La impedancia se puede obtener a partir de la expresión $I_{\max} = \frac{V_{\max}}{Z}$

$$Z = \frac{V_{\max}}{I_{\max}} \equiv \frac{V_T}{I_T} = 179[\Omega]$$

d) El diagrama de fase queda representado por la siguiente figura



CAPÍTULO XI

ECUACIONES DE MAXWELL Y ONDAS ELECTROMAGNETICAS

11.1. Campos eléctricos variables y campos magnéticos inducidos

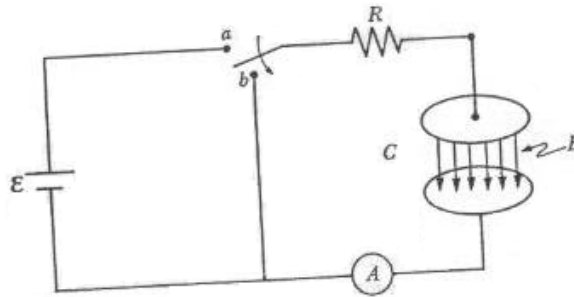
Según la Ley de Faraday cuando un campo magnético varía en función del tiempo, induce un campo eléctrico que está dado por

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} = \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

Se observa también que algo similar sucede cuando varía un campo eléctrico en función del tiempo, éste nos induce un campo magnético cuya ecuación (similar a la anterior) se expresa en la forma siguiente

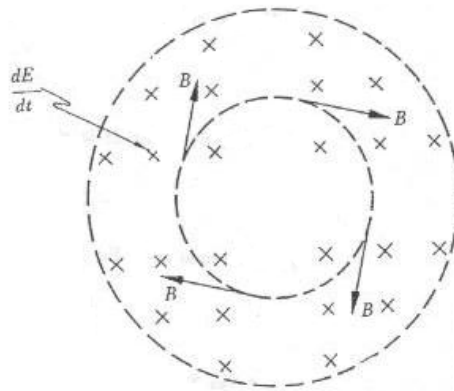
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi_E}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (11.1)$$

Donde el término $\epsilon_0 \frac{\partial \phi_E}{\partial t}$, tiene la función de corriente al compararla con la Ley de Ampere.



Experimentalmente podemos comprobar que un campo eléctrico variable nos induce un campo magnético, consideremos un circuito RC con una fem (ϵ) como se muestra en la figura anterior, al conectar el interruptor en “a” comienza a cargarse el condensador y a medida que se carga, el campo eléctrico entre placas va aumentando hasta llegar a un valor máximo, en el intervalo de tiempo en el que se carga el condensador varía el flujo eléctrico con respecto al tiempo y aparece el termino $\frac{\partial \phi_E}{\partial t}$ que multiplicado por ϵ_0 tiene unidades de corriente. La dirección del campo

magnético inducido se puede determinar a partir de la regla de la mano derecha tal como se muestra en la siguiente figura.



11.2. El aporte de Maxwell (Ley de Ampere-Maxwell)

Se sabe que existen dos formas de producir campos magnéticos:

- a) A través de corrientes continuas como lo establece la Ley de Ampere
- b) Mediante un campo eléctrico variable en el tiempo.

Cabe destacar que fue Maxwell quien modificó la Ley de Ampere introduciéndole la corriente de desplazamiento (i_d), siendo ésta una de sus mayores contribuciones a la electricidad y magnetismo, la corriente de desplazamiento se debe a la variación del campo eléctrico en función del tiempo, con lo cual la **ecuación de Ampere generalizada (Ampere-Maxwell)** se escribe en la forma siguiente:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 I_d \tag{11.2}$$

donde

$$I_d = \epsilon_0 \frac{\partial \phi_E}{\partial t} \tag{11.3}$$

Luego:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi_E}{\partial t} \tag{11.4}$$

La relación anterior que se conoce con el nombre de ecuación de Ampere-Maxwell.

11.3 Ecuaciones de Maxwell

Fue James Clerk Maxwell en 1865, quien resumió en un conjunto de ecuaciones la generalización de los experimentos electromagnéticos observados, éstas son: *Ley de Gauss de la electricidad* (de la cual se deriva la Ley de Coulomb), *Ley de Gauss del magnetismo*, *Ley de Ampere* (modificada posteriormente por Maxwell) y la *Ley de Faraday* (Ver problema 1). Las cuales se representan matemáticamente (en forma diferencial) a través de:

<p>Forma diferencial Ley de Gauss (Eléctrica)</p> $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$	<p>Forma diferencial Ley de Faraday</p> $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$
<p>Forma diferencial Ley de Gauss (Magnética)</p> $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$	<p>Forma diferencial Ley de Ampere-Maxwell</p> $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$

Donde: ϵ_0 y μ_0 representan la permitividad y permeabilidad del vacío respectivamente,

$$\epsilon_0 \vec{E} = \vec{D}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad \rho = \frac{dq}{dV}, \quad \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

Ecuaciones de Maxwell en el vacío ($\rho = 0$; $\vec{J} = 0$)

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (1)$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$

11.4 Energía electromagnética:

La densidad de energía eléctrica está dada por:

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \equiv \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

En forma similar, la densidad de energía magnética se escribe como:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \equiv \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

En una región del espacio libre (vacío) donde existe campo eléctrico y campo magnético, la densidad de energía electromagnética está dada por:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

y la energía electromagnética se expresa como:

$$U = \iiint (u_E + u_B) dV \equiv \frac{1}{2} \iiint (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) dV$$

11.5 Vector de Poynting

En la próxima sección se obtendrán las ecuaciones de ondas electromagnéticas, siendo una de las características más importantes de estas ondas que son capaces de transportar energía de un punto a otro. El vector que nos entrega la dirección y la magnitud de la rapidez del flujo de energía electromagnética, por unidad de área y por unidad de tiempo, recibe el nombre de vector de Poynting y se define como:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$$

11.6 Ondas electromagnéticas:

Una de las aplicaciones más importantes de las ecuaciones de Maxwell, es la obtención de las ecuaciones de las ondas electromagnéticas; en las cuales se muestra que los campos eléctricos y magnéticos pueden propagarse en el espacio, en forma de ondas electromagnéticas.

Las ecuaciones de ondas electromagnéticas en el espacio libre ($\rho = 0$, $J = 0$) se obtienen de la siguiente manera:

Al aplicar rotor a la ecuación de Maxwell (3) se escribe:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Dado que $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$, también se puede escribir

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

reemplazando $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ por (4) se tiene:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Por otro lado, aplicando al primer miembro de la ecuación anterior, la propiedad de los operadores diferenciales vectoriales:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

y luego, teniendo presente la ecuación de Maxwell para el vacío es $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, se encuentra:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

que es la ecuación de onda que corresponde al campo eléctrico. Trabajando en forma similar, después de aplicar rotor a la ecuación (4) y desarrollar, para el campo magnético se encuentra una ecuación similar que está dada por:

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Estas ecuaciones muestran la dependencia temporal de los campos eléctricos y magnéticos, cabe destacar la importancia que tiene el término incorporado por Maxwell (a la ecuación de Ampere) de corriente de desplazamiento en la obtención de estas ecuaciones.

Por otro lado, si comparamos la forma de las dos ecuaciones anteriores con la ecuación diferencial de una onda tridimensional, cuya forma es

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \text{para } \psi = \psi(\vec{r}, t) \text{ (onda escalar cualquiera)}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad \text{para } \vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t) \text{ (Onda vectorial cualquiera)}$$

vemos que el caso vectorial tienen la misma forma y estructura, siempre que se cumpla que $v = 1 / \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$. Si se asignan los valores numéricos a ε_0 y μ_0 , se encuentra que $v \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, que coincide con el valor encontrado por Fizeau para la velocidad de la luz (en el vacío). De esta forma, el campo eléctrico y el campo magnético se pueden acoplar juntos como una sola onda electromagnética que se propaga a través del espacio con una velocidad igual a la de la velocidad de la luz en el vacío ($v = c$), con lo cual se concluye que la luz es una onda electromagnética.

Problemas resueltos:

Problema 11.1

Obtenga las ecuaciones de Maxwell escrita en forma diferencial, a partir de las leyes básicas de: Gauss (eléctrica y magnética), de Faraday y de Ampere- Maxwell.

Solución

La ley de Gauss (eléctrica) escrita en forma integral está dada por

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dv = \iiint (\rho / \epsilon_0) dv$$

Utilizando el teorema de la divergencia

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dv$$

Comparando las dos últimas ecuaciones, se encuentra

$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Primera ecuación de Maxwell})$$

La ley de Gauss (magnética) escrita en forma integral está dada por

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Utilizando el teorema de la divergencia

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iiint (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dv$$

Comparando las dos últimas ecuaciones, se encuentra

$$(2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Segunda ecuación de Maxwell})$$

Ley de Faraday en forma diferencial forma integro-diferencial tiene fa forma

$$\varepsilon = \oint E \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

donde $\phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$, sustituyendo en la expresión anterior, se tiene

$$\oint E \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left(\iint \vec{B} \cdot d\vec{s} \right) \equiv \iint \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$$

Utilizando el teorema de Stokes

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{s}$$

Comparando las dos últimas ecuaciones, se encuentra

$$(3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Tercera ecuación de Maxwell})$$

La ley de Ampere-Maxwell escrita en forma integro diferencial tiene la forma

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_E}{\partial t}$$

Dado que la corriente se puede escribir como $I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s}$, $\phi_E = \iint \vec{E} \cdot d\vec{s}$, sustituyendo en la expresión anterior, se tiene

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint (\mu_0 \vec{J}) \cdot d\vec{s} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} \right)$$

También

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint (\mu_0 \vec{J}) \cdot d\vec{s} + \iint \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iiint (\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{s}$$

Utilizando el teorema de Stokes

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

Comparando las dos últimas ecuaciones, se encuentra

$$(4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Cuarta ecuación de Maxwell})$$

Como $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, también se puede escribir

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Problema 11.2

Mostrar que las amplitudes de los campos \vec{E}_0 y \vec{B}_0 deben ser perpendiculares a la dirección de propagación \vec{k}

Solución

Consideremos las siguientes ondas que son soluciones de las ecuaciones de diferenciales de onda, cuyas formas están dadas por:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \epsilon)} \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \epsilon)} \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación de Maxwell, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ se tiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \epsilon)}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

de donde:

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \perp \vec{k}$$

de esta manera \vec{E} debe ser perpendicular a la dirección de propagación \vec{k}

En forma similar, utilizando, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, se encuentra:

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \perp \vec{k}$$

también, \vec{B} debe ser perpendicular a la dirección de propagación \vec{k} . Por lo tanto \vec{E} y \vec{B} , ambos, son vibraciones transversales.

El próximo paso es encontrar una relación entre las amplitudes de los campos \vec{E}_0 y \vec{B}_0 , para lo cual se usan las siguientes relaciones:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\vec{k} \times \vec{E}$$

y

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B}$$

sustituyendo en la ecuación de Maxwell, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ se encuentra:

$$\frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} = \vec{B}$$

de esta forma:

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$$

También para las amplitudes se puede escribir

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0$$

La ecuación anterior indica que \vec{B} es perpendicular a \vec{E} , y \vec{B} está en fase con \vec{E} . Los tres vectores \vec{E}_0 , \vec{B}_0 y \vec{k} forman un sistema de coordenadas cartesianas como lo muestra en la siguiente figura

Problema 11.3

Consideremos el caso de una onda armónica plana propagándose en la dirección positiva del eje x , de tal forma que el campo eléctrico asociado sea paralelo al eje y , se puede escribir como:

$$E_y(x,t) = E_{0y} \cos(kx - \omega t + \varepsilon)$$

Determine el campo magnético asociado a esta onda.

Solución:

El campo magnético asociado se puede determinar utilizando la ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

donde:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial E_y}{\partial x} \right)$$

y

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \left(\frac{\partial B_x}{\partial t}, \frac{\partial B_y}{\partial t}, \frac{\partial B_z}{\partial t} \right)$$

Reemplazando en la ecuación se Maxwell y comparando componentes se encuentra:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

de donde:

$$B_z = -\int \frac{\partial E_y}{\partial x} dt = E_{0y} k \int \text{sen}(kx - \omega t + \varepsilon) dt + Cte$$

luego:

$$B_z(x,t) = \frac{k}{\omega} E_{0y} \cos(kx - \omega t + \varepsilon)$$

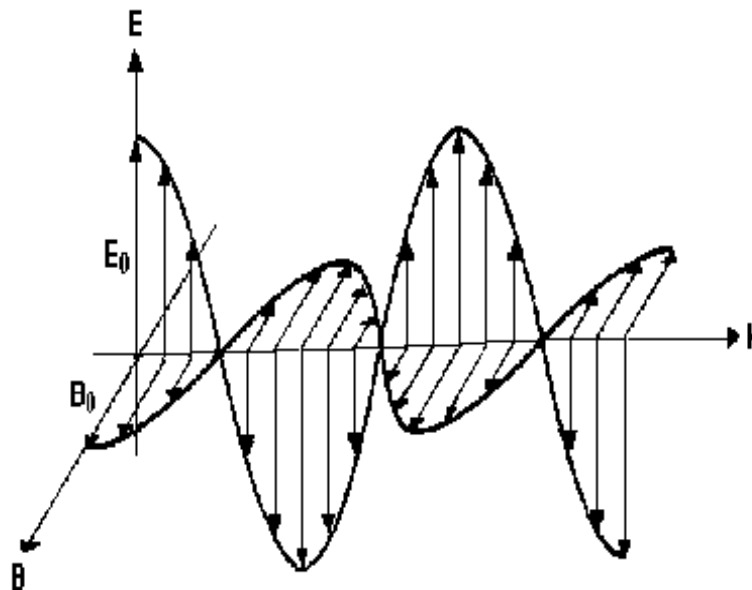
dato que $\omega / k = c$, entonces

$$B_z(x,t) = \frac{1}{c} E_{0y} \cos(kx - \omega t + \varepsilon)$$

También se puede escribir:

$$E_y(x,t) = cB_z(x,t)$$

Vemos que estas componentes tienen la misma dependencia temporal y difieren sólo por un escalar c . Así los vectores \vec{E} y \vec{B} son perpendiculares y están en fase tal como se muestra en la siguiente figura



Problema 11.4

Para la componente del campo eléctrico de una onda electromagnética que está dada por

$$E_y(x,t) = E_y = E_{0,y} \cos(kx - \omega t + \varepsilon)$$

Determine el campo magnético asociado, utilizando directamente la ecuación:

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$$

Solución:

Para esta caso se tiene que $\vec{E} = \hat{j} E_y$ $\vec{k} = \hat{i} k$, entonces

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} = \frac{1}{\omega} \hat{i} k \times \hat{j} E_y$$

$$\vec{B}_z = \frac{1}{\omega} k E_y (\hat{i} \times \hat{j}) = \frac{k}{\omega} E_y \hat{k}$$

$$\vec{B}_z = \frac{1}{c} E_y \hat{k}$$

Problema 11.5

Para el caso de una onda plana armónica linealmente polarizada, que se propaga en el vacío dada por:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Determine:

- a) Vector de Pynting
- b) La Irradiancia

Solución

a) El vector de Pynting, está definido a través de

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

Reemplazando los campos respectivos y sabiendo que $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, se encuentra

$$\vec{S} = c^2 \epsilon_0 \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

b) La Irradiancia está definida como el promedio temporal del módulo del vector de Poynting:

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle \equiv \langle S \rangle$$

de a) se tiene que $S = c^2 \epsilon_0 |\vec{E}_0 \times \vec{B}_0| \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$, entonces

$$I = \langle S \rangle \equiv c^2 \epsilon_0 |\vec{E}_0 \times \vec{B}_0| \langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle$$

Por otro lado, teniendo presente que el valor medio de una función cualquiera del tiempo $f(t)$, se define como:

$$\langle f \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt$$

con τ representando el intervalo de tiempo, se encuentra que:

$$\langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} \equiv \langle \text{sen}^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle$$

Con esto, se encuentra que la Irradiancia queda expresada a través de:

$$I = \frac{c^2 \epsilon_0}{2} |\vec{E}_0 \times \vec{B}_0| = \frac{c^2 \epsilon_0}{2} E_0 B_0$$

dado que $B_0 = E_0 / c$, se puede escribir:

$$I = \frac{c \epsilon_0}{2} E_0^2$$

Problema 11.6

A partir de las ecuaciones de Maxwell, obtenga la **Ecuación de continuidad**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ ; (conservación de la carga)}$$

Solución

La densidad de corriente eléctrica \vec{J} y la densidad volumétrica de carga ρ no son magnitudes independientes, sino que están relacionadas en cada punto por una ecuación diferencial, llamada *ecuación de continuidad*. Esta relación tiene su origen en el hecho que la carga eléctrica no puede crearse ni destruirse, y dentro de este contexto, puede ser obtenida a partir de las ecuaciones de Maxwell, en la forma siguiente.

Apliquemos la divergencia a la ecuación de Maxwell (3):

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

dado que la divergencia de un rotor es cero, $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = 0$, entonces:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

Utilizando el hecho que: $\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$. La ecuación anterior se escribe

como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0$$

Teniendo presente la ecuación de Maxwell (2), se encuentra:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Problema 11.7

(Interpretación de la ecuación de continuidad)

Muestre que a partir de la ecuación de continuidad se puede obtener que la corriente está dada por: $I = dq/dt$

Solución

Para interpretar lo que representa la ecuación de continuidad, integremos esta ecuación en un volumen v .

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d v + \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} d v = 0$$

Como se está considerando un volumen fijo y la derivada respecto del tiempo actúa sólo sobre ρ , es posible escribir:

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d v + \frac{d}{dt} \iiint \rho d v = 0$$

(No obstante que ρ , es función de la posición así como del tiempo, de modo que la derivada con respecto al tiempo se convierte de parcial en total)

Apliquemos el teorema de la divergencia al primer miembro de la ecuación anterior.

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d v = \iint \vec{J} \cdot d \vec{s}$$

esto permite escribir:

$$\iint \vec{J} \cdot d\vec{s} + \frac{d}{dt} \iiint \rho d v = 0$$

Teniendo presente que la intensidad de corriente es: $I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s}$ y que la carga eléctrica se puede expresar como: $q = \iiint \rho d v$. entonces de encuentra:

$$I = -\frac{dq}{dt}$$

de donde se ve que I no se crea de manera espontánea, para que esto suceda, es necesario que exista una carga eléctrica que esté variando en el tiempo.

Problema 11.8

Calcular el promedio temporal de la densidad de energía $\langle u \rangle$, y encontrar una relación entre este de este último con la Irradiancia .

Solución

Consideremos el caso de las dos ondas planas armónicas, en estas condiciones, el promedio temporal de la densidad de energía, a partir de su definición se escribe como:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \langle E^2 \rangle + \frac{1}{\mu_0} \langle B^2 \rangle \right)$$

dado que:

$$\langle E^2 \rangle = E_0^2 \langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle = E_0^2 / 2$$

y

$$\langle B^2 \rangle = B_0^2 \langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle = B_0^2 / 2$$

sustituyendo se tiene:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4} \left[\epsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{\mu_0} B_0^2 \right]$$

como entre las componentes se cumple que $E_0 = cB_0$, además que $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ entonces sustituyendo, se encuentra:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4} \left[\epsilon_0 E_0^2 + \epsilon_0 E_0^2 \right] = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

Comparando esta expresión de la Irradiancia $I = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2$, se encuentra que:

$$I = c \langle u \rangle$$

Problema 11.9

En una región cilíndrica del espacio de radio R un campo eléctrico está variando en función del tiempo, determine la dirección y magnitud del campo magnético inducido para $r < R$.

Solución:

De la ley de Faraday tenemos que:

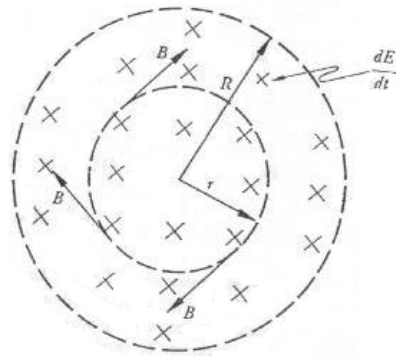
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

de donde:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

Integrando para $r < R$ ambos lados de la ecuación se tiene que:

$$B 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \pi r^2 \frac{\partial E}{\partial t}$$



Luego:

$$B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{r}{2} \frac{\partial E}{\partial t}$$