# CAPÍTULO 1. Elasticidad

**INTRODUCCIÓN**

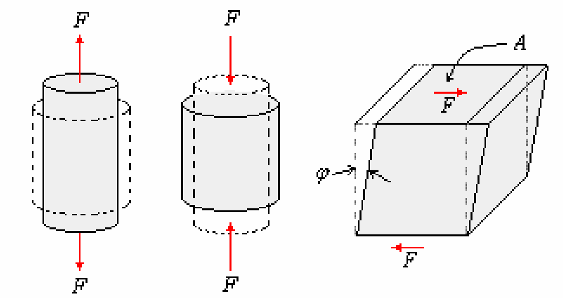
Hasta ahora en nuestro estudio de mecánica hemos asumido que los cuerpos son indeformables; esto no es cierto, aunque se justifica cuando los efectos de las deformaciones carecen de importancia.

En este capítulo trataremos sobre los cambios de forma producidos en un cuerpo cuando está bajo la acción de una fuerza, esto es, en el sentido del comportamiento de los materiales bajo la acción de diversos esfuerzos, iniciándonos en la técnica del diseño.

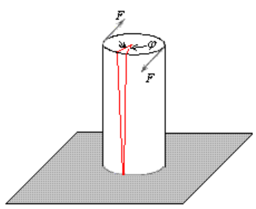
**PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES**

Muchos materiales cuando están en servicio están sujetos a fuerzas o cargas. En tales condiciones es necesario conocer las características del material para diseñar el instrumento donde va a usarse de tal forma que los esfuerzos a los que vaya a estar sometido no sean excesivos y el material no se fracture. El comportamiento mecánico de un material es el reflejo de la relación entre su respuesta o deformación ante una fuerza o carga aplicada.

Hay tres formas principales en las cuales podemos aplicar cargas: Tensión, Compresión y Cizalladura.




Además en ingeniería muchas cargas son torsionales en lugar de sólo cizalladura.

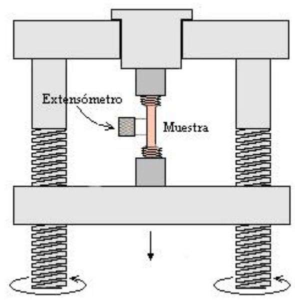



**ENSAYO DE TENSIÓN Y DIAGRAMA DE ESFUERZO – DEFORMACIÓN.** El ensayo de tensión se utiliza para evaluar varias propiedades mecánicas de los materiales que son importantes en el diseño, dentro de las cuales se destaca la resistencia, en particular, de metales y aleaciones.

En este ensayo la muestra se deforma usualmente hasta la fractura incrementando gradualmente una tensión que se aplica uniaxialmente a lo largo del eje longitudinal de la muestra. Las muestras normalmente tienen sección transversal circular, aunque también se usan especimenes rectangulares.

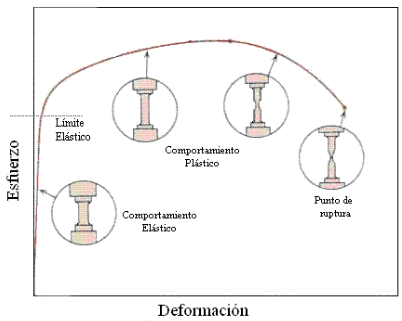

*Muestra típica de sección circular para el ensayo de tensión - deformación*

Durante la tensión, la deformación se concentra en la región central más estrecha, la cual tiene una sección transversal uniforme a lo largo de su longitud. La muestra se sostiene por sus extremos en la máquina por medio de soportes o mordazas que a su vez someten la muestra a tensión a una velocidad constante. La máquina al mismo tiempo mide la carga aplicada instantáneamente y la elongación resultante (usando un extensómetro). Un ensayo de tensión normalmente dura pocos minutos y es un ensayo destructivo, ya que la muestra es deformada permanentemente y usualmente fracturada.




*Ensayo tensión – deformación*

Sobre un papel de registro, se consignan los datos de la fuerza (carga) aplicada a la muestra que está siendo ensayada así como la deformación que se puede obtener a partir de la señal de un extensómetro. Los datos de la fuerza pueden convertirse en datos de esfuerzo y así construirse una gráfica tensión – deformación.




*Gráfica típica tensión vs deformación*

**DEFORMACIÓN ELÁSTICA Y PLÁSTICA**

Cuando una pieza se somete a una fuerza de tensión uniaxial, se produce una deformación del material. Si el material vuelve a sus dimensiones originales cuando la fuerza cesa se dice que el material ha sufrido una DEFORMACIÓN ELASTICA. El número de deformaciones elásticas en un material es limitado ya que aquí los átomos del material son desplazados de su posición original, pero no hasta el extremo de que tomen nuevas posiciones fijas. Así cuando la fuerza cesa, los átomos vuelven a sus posiciones originales y el material adquiere su forma original.
Si el material es deformado hasta el punto que los átomos no pueden recuperar sus posiciones originales, se dice que ha experimentado una DEFORMACIÓN PLASTICA.

**DIFERENCIA ENTRE LOS CUERPOS ELASTICOS Y LOS INELASTICOS.** Los cuerpos elásticos son los cuerpos que después de aplicarles una fuerza vuelven a su forma normal mientras que los inelásticos tienen su grado de elasticidad muy bajo y si los deforman no vuelven a su forma original.

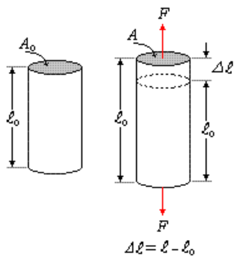
**LEY DE HOOKE.**
En la parte de comportamiento elástico se cumple la Ley de Hooke. Robert Hooke fue el primero en enunciar esta relación con su invento de un volante de resorte para un reloj. En términos generales, encontró que una fuerza que actúa sobre un resorte produce un alargamiento o elongación que es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza.

$$F = -k\Delta\ell$$

El signo menos es porque la fuerza es en oposición a la deformación.
La constante de la proporcionalidad $k$ varía mucho de acuerdo al tipo de material y recibe el nombre de constante del resorte o coeficiente de rigidez.

$k = \dfrac{F}{\Delta\ell}$, sus unidades son $\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

**ESFUERZO Y DEFORMACIÓN UNITARIA.**
**Esfuerzo**. Consideremos una varilla cilíndrica de longitud $\ell_0$ y una sección transversal de área $A_0$ sometida a una fuerza de tensión uniaxial $F$ que alarga la barra de longitud $\ell_0$ a $\ell$, como se muestra en la figura.




Por definición, El esfuerzo $S$ en la barra es igual al cociente entre la fuerza de tensión uniaxial media $F$ y la sección transversal original $A_0$ de la barra.

$S = \dfrac{F}{A_0}$, sus unidades son $\dfrac{N}{m}$.

**Deformación unitaria**: Por definición, la deformación unitaria originada por la acción de una fuerza de tensión uniaxial sobre una muestra metálica, es el cociente entre el cambio de longitud de la muestra en la dirección de la fuerza y la longitud original.

$\delta = \dfrac{\ell - \ell_0}{\ell} = \dfrac{\Delta\ell}{\ell}$, la deformación unitaria es una magnitud adimensional
En la práctica, es común convertir la deformación unitaria en un porcentaje de deformación o porcentaje de elongación
% deformación = deformación x 100 % = % elongación

**MODULO ELASTICO O DE ELASTICIDAD.**
A la constante de proporcionalidad, podemos escribir la ley de Hooke en su forma general.

$$\text{Módulo Elástico} = \frac{esfuerzo}{deformación}$$

Para el caso de Deformación por tracción o compresión longitudinal
El esfuerzo es $S = \dfrac{F}{A}$, la deformación unitaria es

$$\delta = \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

El módulo elástico es conocido como el MODULO DE YOUNG.

$$Y = \frac{F/A}{\Delta\ell/\ell} = \frac{S}{\delta}$$

TABLA I
**Módulo de elasticidad o módulo de Young**.

| Nombre | Módulo de elasticidad $Y$ $10^{10}$ N/m$^2$ |
|---|---|
| Aluminio | 6,8 |
| Cobre | 10,8 |
| Oro | 7,6 |
| Hierro, fundido | 7,8 |
| Plomo | 1,7 |
| Nickel | 20,6 |
| Platino | 16,7 |
| Plata | 7,4 |
| Latón | 4,6 |
| Acero | 20,0 |

**Ejemplo 1.** Los ortodoncistas usan alambres de bajo módulo de Young y alto límite elástico para corregir

la posición de los dientes mediante arcos tensores. ¿Por qué?

**Solución.**

Bajo módulo de Young para que sea relativamente fácil deformarlo elásticamente para montar los arcos en los dientes. La tensión deberá ser menor que la tensión de fluencia del material, de ahí que el límite elástico tenga que ser alto, ya que si el arco se deforma plásticamente, su deformación es irreversible y por lo tanto, no estará tensionando los dientes para corregir su posición transversal se convierte en un paralelogramo.

**Ejemplo 2.** De un alambre de cobre de 1,5 m de longitud y 2 mm de diámetro se cuelga un peso de 8 kg. Se pregunta:

a) ¿Hemos rebasado el límite de elasticidad?

b) ¿Se romperá el alambre?

c) En caso de ser negativas las preguntas anteriores, ¿cuál es su alargamiento?

Módulo de Young = $12 x 10^{10}$ N/m$^2$

Límite de elasticidad de $3x10^7$ a $12x10^7$ N/m$^2$

Límite de ruptura de $20x10^7$ a $50x10^7$ N/m$^2$

**Solución.**

a) y b) La sección del alambre es:

$A = \pi r^2$ = 3,14 mm$^2$ = 3,14x10$^{-6}$ m$^2$

La fuerza que corresponde a cada m$^2$ de sección es:

$$\frac{F}{A} = \frac{Mg}{A} = \frac{8 \times 9{,}8}{3{,}14 \times 10^{-6}}$$

$$= 2{,}49 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

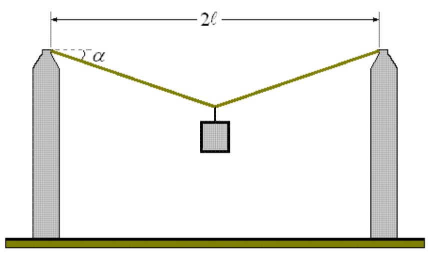
Que no llega ni al límite inferior de elasticidad ni al de ruptura.

$$\text{c)}\ \Delta l = \frac{Fl}{YA} = \frac{8 \times 9{,}8 \times 1{,}5}{12 \times 10^{10} \times 3{,}14 \times 10^{-6}}$$

$$= 0{,}0003\ \text{m}$$

$$= 0{,}3\ \text{mm}$$

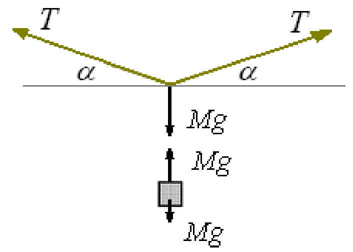
**Ejemplo 3.** Entre dos columnas fue tendido un alambre de longitud 2 $\ell$ . En el alambre, exactamente en el centro, fue colgado un farol de masa *M*. El área de la sección transversal del alambre es *A*, el módulo de elasticidad es *Y*. Determinar el Angulo $\alpha$, de pandeo del alambre, considerándolo pequeño.




**Solución.**

Para encontrar la tensión del hilo.

Por condición de equilibrio:




Suma de fuerzas verticales:

$$\sum F_y = 0$$

$$2T\text{sen}\alpha - Mg = 0 \Rightarrow$$

$$T = \frac{Mg}{2\text{sen}\alpha}.$$

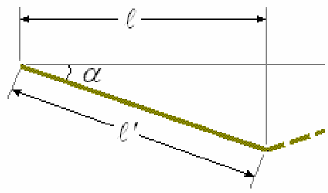
Por la ley de Hooke deducimos que

$$T = \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right) YA$$

Igualando:

$$\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right) YA = \frac{Mg}{2\text{sen}\alpha}$$

De la figura siguiente:




$$\ell' = \frac{\ell}{\cos\alpha} \ \text{ y } \ \ell' = \ell + \Delta\ell$$

De aquí:

$$\frac{\ell}{\cos\alpha} = \ell + \Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell = \ell\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{1}{\cos\alpha} - 1$$

Luego

$$\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) YA = \frac{Mg}{2\text{sen}\alpha}$$

Para ángulos pequeños tenemos que

$\text{sen}\alpha \approx \alpha$ y

$$\cos\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\left(\alpha/2\right) \approx 1 - \alpha^2/2 .$$

Reemplazando obtenemos

$$\left(\frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{2}} - 1\right) YA = \frac{Mg}{2\alpha}$$

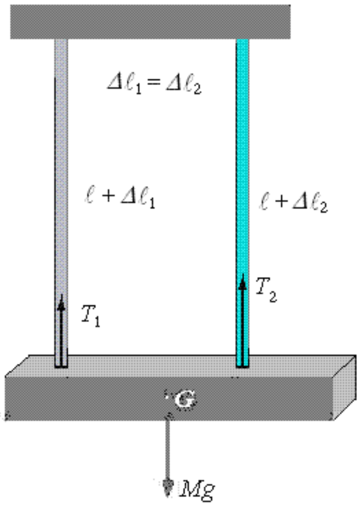
$$\Rightarrow \left[\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)-1\right]YA = \frac{Mg}{2\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{2}YA = \frac{Mg}{2\alpha} \Rightarrow \alpha^3 = \frac{Mg}{YA}$$

Finalmente

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{Mg}{YA}}$$

**Ejemplo 4.** Se cuelga una viga de 2000 kg de dos cables de la misma sección, uno de aluminio y otro de acero. Al suspenderla, ambos cables se estiran lo mismo. Calcular la tensión que soporta cada uno. Módulos de Young: acero = $20 \times 10^{10}$ N/m$^2$, aluminio $= 7 \times 10^{10}$ N/m$^2$



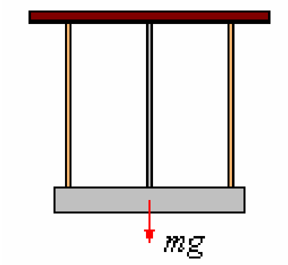

**Solución.**
Si los cables inicialmente tienen igual longitud y la viga finalmente está horizontal, ambos cables han experimentado el mismo alargamiento:

Como $\Delta\ell = \frac{F\ell}{YA}$, $\frac{\ell T_1}{Y_1 A} = \frac{\ell T_2}{Y_2 A}$ de aquí

$$\frac{T_1}{7} = \frac{T_2}{20}$$

Donde el subíndice 1 se refiere al aluminio y el 2 al acero.
Por estar el sistema en equilibrio:
$T_1 + T_2 = Mg$ = 2 000 x 9,8 N
De ambas
$T_1$ = 5 081,5 N $T_2$ = 14 517,5 N

**Ejemplo 5.** Una barra homogénea, de masa $m$ = 100 kg, está suspendida de tres alambres verticales de la misma longitud situados simétricamente.
Determinar la tensión de los alambres, si el alambre del medio es de acero y los otros dos son de cobre. El área de la sección transversal de todos los alambres es igual.
El módulo de Young del acero es dos veces mayor que el del cobre.




**Solución.**
Partiendo de los conceptos de simetría, es evidente que el alargamiento de los hilos será igual.
Designemos este alargamiento por $\Delta\ell$.
De acuerdo con la ley de Hooke, la tensión del hilo de acero es

$F_a = \frac{AY_a}{\ell}\Delta\ell$ y la del hilo de cobre, es

$$F_c = \frac{AY_c}{\ell}\Delta\ell$$

De donde concluimos que la relación de las tensiones es igual a la relación de los módulos de elasticidad correspondientes:

$$\frac{F_c}{F_a} = \frac{Y_c}{Y_a} = \frac{1}{2}.$$

En equilibrio
$2F_c + F_a = mg$.
Por consiguiente,

$F_c = \frac{mg}{4}$ = 250 N y $F_a = 2F_c$ = 500 N.

**Ejemplo 6.** Una columna de hormigón armado se comprime con una fuerza $P$. Considerando que el módulo do Young del hormigón $Y_{ha}$, es 1/10 del de hierro $Y_h$ y que el área de la sección transversal del hierro es 1/20 de la del hormigón armado, encontrar qué parte de la carga recae sobre el hormigón.

**Solución.**
Basándonos en la ley de Hooke, escribimos

$F_{ha} = \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)A_{ha}Y_{ha}$ y

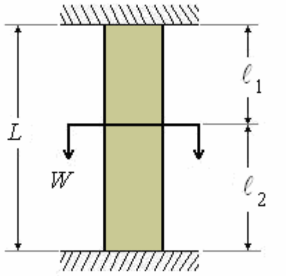
$$F_h = \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)A_h Y_h = = \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)\frac{A_{ha}}{20}10Y_{ha}$$

De allí deducimos que $\frac{F_{ha}}{F_h} = 2$.

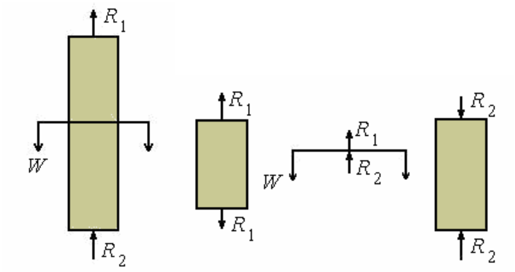
De este modo, 2/3 del peso recae sobre el hormigón armado y 1/3, sobre el hierro.

**Ejemplo 7.** Un peso $W$ se encuentra sujeto entre dos barras de peso despreciable, de las mismas características pero de diferente longitud y como se muestra en la figura. Los extremos de las barras

están ligados al peso y a los apoyos, los cuales son indeformables.
Encontrar las reacciones que se producen en los apoyos.




**Solución.**
Diagramas del cuerpo libre del conjunto y de las partes:




Por equilibrio estático, $\sum F_y = 0$:

$R_1 + R_2 - W = 0$ (1)

Geométricamente, tiene que cumplirse que los alargamientos sean iguales:

$\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2$

Por elasticidad

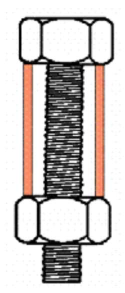
$$\frac{R_1\ell_1}{AY} = \frac{R_2\ell_2}{AY} \Rightarrow$$

$R_1\ell_1 = R_2\ell_2$ (2)

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2), obtenemos:

$$R_1 = \frac{\ell_2}{L}W \quad \text{y} \quad R_2 = \frac{\ell_1}{L}W$$

**Ejemplo 8.** Un perno de acero se enrosca en un tubo de cobre como muestra la figura. Encontrar las fuerzas que surgen en el perno y en el tubo debido al hacer la tuerca una vuelta, si la longitud del tubo es $\ell$, el paso de rosca del perno es $h$ y las áreas de la sección transversal del perno y del tubo son iguales a $A_a$, y $A_c$ respectivamente

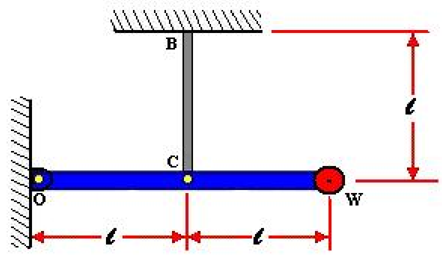


**Solución.**
Bajo la acción de la fuerza de compresión F, el tubo disminuye en $F\ell / AY$. y bajo la acción de la fuerza de extensión *F*, el perno se alarga en el valor $F\ell / A_aY_a$. La suma $F\ell / A_aY_a + F\ell / A_cY_c$ es igual al desplazamiento de la tuerca a lo largo del perno:

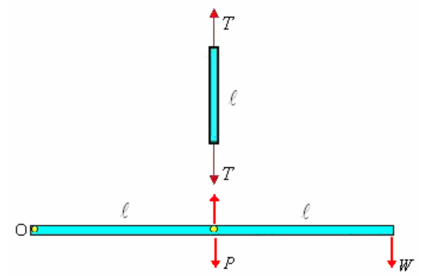
$F\ell / A_aY_a + F\ell / A_cY_c = h$, de donde:

$$F = \frac{h}{\ell}\left(\frac{A_aY_aA_cY_c}{A_aY_a + A_cY_c}\right).$$

**Ejemplo 9. Viga horizontal sostenida mediante un tirante.** En el sistema mostrado en la figura, ¿cuánto bajará el peso *W* respecto a la posición en la cual el tensor no estaba deformado?




La barra es indeformable y de peso *P*.
El tensor BC es de peso despreciable, área *A* y módulo de elasticidad *Y*.
**Solución.**

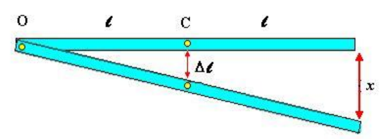



Por equilibrio estático, $\sum \tau_o = 0$

$T\ell - P\ell - W2\ell = 0$

$T - P - 2W = 0$

$T = P + 2W$ (1)




Geométricamente, considerando que el giro que se produce es pequeño, podemos escribir:

$x = 2\Delta\ell$

Por elasticidad, el estiramiento $\Delta\ell$ del tensor es:

$$\Delta\ell = \frac{T\ell}{AY}$$

Luego,

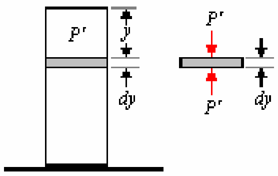
$$x = \frac{2T\ell}{AY} \qquad (2)$$

Reemplazando la expresión (1) en (2):

$$x = \frac{2(P+2W)\ell}{AY}$$

**Ejemplo 10. Deformaciones no uniformes por peso propio.**
Determinar la deformación producida en una barra debido a su peso propio de una barra del largo *L*, sección *A*, módulo de elasticidad *Y* y densidad $\rho$ .

**Solución.**
El elemento diferencial $dy$ soporta el peso $P'$ de la porción de barra de longitud $y$ que está sobre él.




$$P' = m'g = \rho V'g = \rho Ayg$$

Siendo la longitud de la barra *L*, su deformación será $\Delta L$ , la deformación del elemento diferencial $dy$ debido al peso $P'$ , será $d(\Delta L)$.

$$d(\Delta L) = \frac{P'dy}{YA} = \frac{\rho Ag}{YA}ydy$$

$$= \frac{\rho g}{Y}ydy$$

Luego

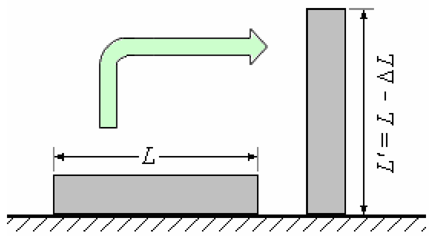
$$\Delta L = \int d(\Delta L) = \frac{\rho g}{Y}\int_0^L ydy$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\rho gL^2}{Y} = \frac{1}{2}\frac{(\rho gAL)L}{AY}$$

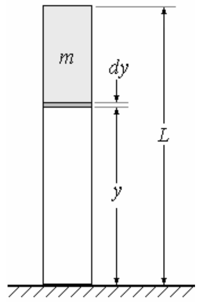
o $\Delta L = \dfrac{1}{2}\dfrac{(\text{Peso Total})\times L}{AY}$

Observamos que esta deformación es igual a la mitad de la deformación que se produciría, como sí, el peso estuviera concentrado en el extremo superior.

**Ejemplo 11.** Una barra de masa *M*, módulo *Y*, sección A y altura *L* está sobre el piso. Determine la deformación que sufre la atura de la barra por peso propio. Considere que la densidad lineal de la barra varía según $\rho_\ell = \kappa y$, ( $\kappa$ es constante e *y* la altura medida desde el piso).
Datos: *M*, *Y*, *A*, *L* y $\kappa$ .




**Solución.**




El elemento de columna *dy* es deformado por el peso de la masa *m*.

$$d(\Delta L) = \frac{mg\,dy}{YA}$$

Cálculo de *m*.

$$dm = \rho_\ell dy = \kappa ydy \Rightarrow$$

$$m = \int_y^L \kappa ydy = \kappa \left.\frac{y^2}{2}\right|_y^L$$

$$= \frac{\kappa}{2}\left(L^2 - y^2\right)$$

Luego:

$$d(\Delta L) = \frac{\kappa g}{2YA}\left(L^2 - y^2\right)dy$$

Integrando

$$\Delta L = \int_0^L d(\Delta L) = \frac{\kappa g}{2YA}\int_0^L \left(L^2 - y^2\right)dy$$

$$\Delta L = \frac{\kappa g}{2YA}\left(L^2 y - \frac{y^3}{3}\right)_0^L$$

$$= \frac{\kappa g}{2YA}\left(L^3 - \frac{L^3}{3}\right) = \frac{\kappa gL^3}{3YA}$$

Como la masa total es

$$M = \int_0^L dm = \int_0^L \kappa ydy = \kappa \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^L$$

$$= \kappa\frac{L^2}{2}$$

$$\Delta L = \frac{2M}{\kappa L^2}\frac{\kappa gL^3}{3YA} = \frac{2MgL}{3YA}$$

**Ejemplo 12**. Hállese la longitud que ha de tener un hilo de alambre, de densidad 8,93 y módulo de rotura 1020,4 kg/cm$^2$ para que se rompa por su propio peso.

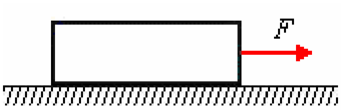
**Solución.**
1020,4 kg/cm$^2$ = 1 020,4x9,8 N/cm$^2$ =10$^8$ N/m$^2$;
$\rho$ = 8930 kg/m$^3$.
Para que el hilo se rompa, su peso ha de ser por lo menos de 10$^8$$A$ N, siendo $A$ la sección.
O sea:

$$P = mg = A\ell\rho g = 10^8 A$$

Es decir:

$$\ell = \frac{10^8 A}{A\rho g} = \frac{10^8}{8930x9{,}8} = 1143{,}6 \text{ m}$$

**Ejemplo 13. Deformaciones por aceleración**
Una barra uniforme de acero (Longitud $L$, área de sección recta $A$ densidad $\rho$, módulo de young $Y$) se halla sobre un plano horizontal exento de rozamiento y se tira de ella con una fuerza constante $F$.
¿Cuál es el alargamiento total de la barra a consecuencia de la aceleración?

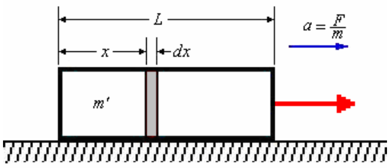



**Solución.**
a) Sea $m$ la masa total de la barra

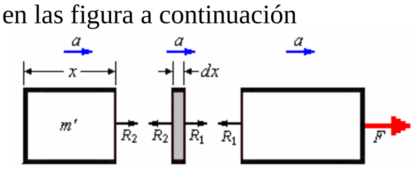
$$m = \rho AL$$

Tomemos un elemento diferencial $dx$, cuya masa es $dm$

$$dm = \rho Adx$$




Hagamos los diagramas del cuerpo libre de los tres sectores.
La fuerza sobre cada uno de los tres sectores se indica en las figura a continuación




El elemento diferencial $dm$ se mueve con aceleración $a$ debido a la fuerza ($R_1$ –$R_2$)
Y la fuerza que lo estira es $R_2$. Por lo tanto su deformación será un diferencial de $\Delta L$ esto es $d(\Delta L)$ :

$$d(\Delta L) = \frac{R_2 dx}{YA} \text{ y } \Delta L = \int_0^L d(\Delta L)$$

Como $R_2 = m'a$, $m' = \rho Ax$ y

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F}{\rho AL}, \text{ tenemos:}$$

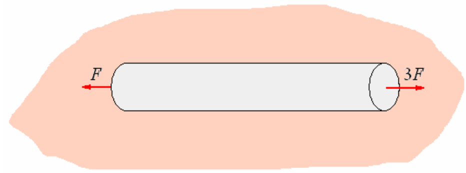
$$R_2 = (\rho Ax)\left(\frac{F}{\rho AL}\right) = F\frac{x}{L}$$

$$d(\Delta L) = \frac{F}{YAL} xdx, \text{ y}$$

$$\Delta L = \int d(\Delta L) = \int_{x=0}^{x=L} \frac{F}{YAL} xdx$$

De donde $\Delta L = \dfrac{1}{2}\dfrac{FL}{YA}$

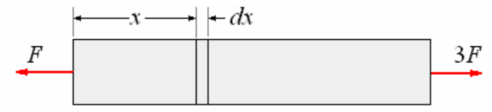
**Ejemplo 14.** Se tiene una columna de largo $L$, sección transversal $A$, densidad $\rho$, módulo de elasticidad $Y$. Se jala cobre un piso liso de la manera como se muestra en la figura. Calcule cuanto estira el cuerpo.



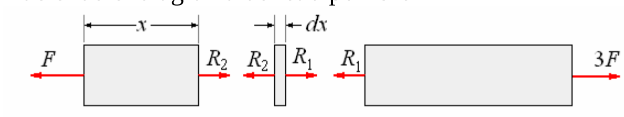

**Solución.**
**Primer método.**
Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F = ma$$

$$3F - F = ma \Rightarrow a = \frac{2F}{m} = \frac{2F}{\rho AL}$$




Haciendo el diagrama del cuerpo libre




El elemento diferencial es estirado por la fuerza $R_2$.

$$d(\Delta L) = \frac{R_2 dx}{AY}$$

Cálculo de $R_2$:

$$R_2 - F = m'a$$

$$\Rightarrow R_2 = F + m'a = F + \rho Ax\frac{2F}{\rho AL}$$

$$= F + 2F\frac{x}{L}$$

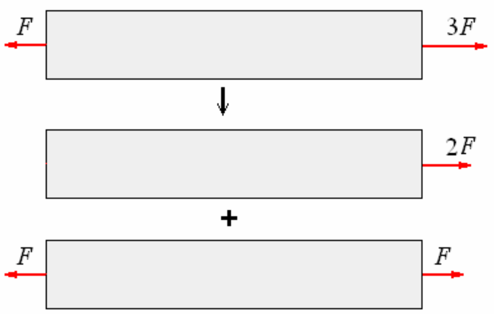
$$d(\Delta L) = \frac{F}{AY}\left(1 + \frac{2x}{L}\right)dx$$

$$\Delta L = \frac{F}{AY}\int_0^L \left(1 + \frac{2x}{L}\right)dx = \frac{F}{AY}\left(x + \frac{x^2}{L}\right)\Big|_0^L$$

$$= \frac{2FL}{AY}$$

**Segundo método.**
El sistema de fuerzas puede ser desdoblado en dos partes cuyas deformaciones parciales sumadas hacen

el efecto total, tal como se muestra en la figura siguiente:




La primera parte es la deformación de un cuerpo jalado por la fuerza $2F$:

$$\Delta L_1 = \frac{1}{2}\frac{(2F)L}{YA} = \frac{FL}{YA}$$

La segunda parte es la deformación de un cuerpo sujeto a la tensión $F$:

$$\Delta L_2 = \frac{FL}{YA}$$

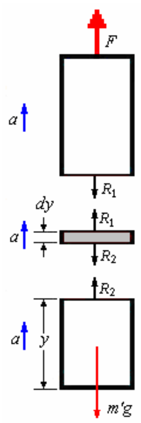
La deformación total es la suma de las deformaciones parciales:

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = \frac{FL}{YA} + \frac{FL}{YA}$$

$$= \frac{2FL}{AY}$$

**Ejemplo 15.** Si la barra se jala hacia arriba con una fuerza $F$ ($F > mg$). ¿Cuál es el alargamiento total de la barra?

**Solución.**




El elemento diferencial $dm$ se mueve con aceleración $a$ debido a la fuerza ($R_1 - R_2$)

Y la fuerza que lo estira es $R_2$. Por lo tanto su deformación será un diferencial de $\Delta L$ esto es $d(\Delta L)$ :

$$d(\Delta L) = \frac{R_2 dy}{YA} \text{ y } \Delta L = \int_0^L d(\Delta L)$$

Como

$$R_2 - m'g = m'a \Rightarrow R_2 = m'(g + a),$$

$$m' = \rho Ay \text{ y } a = \frac{F - mg}{m} = \left(\frac{F}{\rho AL} - g\right),$$

Tenemos:

$$R_2 = (\rho Ay)\left(\frac{F}{\rho AL}\right) = F\frac{y}{L}$$

$$d(\Delta L) = \frac{F}{YAL} ydy \text{, y}$$

$$\Delta L = \int d(\Delta L) = \frac{F}{YAL}\int_0^L ydy$$

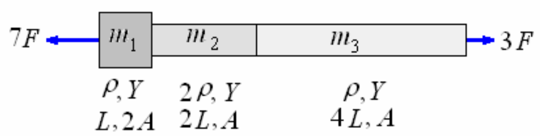
De donde

$$\Delta L = \frac{1}{2}\frac{FL}{YA}$$

**Ejemplo 16.** Para la barra compuesta mostrada determine:

a) Su aceleración.

b) La deformación de cada una de sus tres partes y su deformación total.




**Solución.**

a) $m_1 = 2\rho LA$ , $m_2 = 4\rho LA$ y $m_3 = 2\rho LA$

Aplicando la segunda ley de Newton:

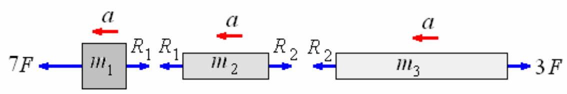
$$\sum F = ma \Rightarrow 3F - 7F = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

$$\Rightarrow -4F = 10\rho LAa$$

$$\Rightarrow a = -\frac{0{,}4F}{\rho LA}$$

El conjunto se mueve hacia la izquierda.

b) La figura siguiente muestra los diagramas del cuerpo libre de cada uno de los elementos del conjunto.




Tomando como positivo hacia la izquierda.

Cálculo de $R_2$:

$$R_2 - 3F = m_3 a \Rightarrow$$

$$R_2 = 3F + m_3 a$$

$$= 3F + (4\rho LA)\left(\frac{0{,}4F}{\rho LA}\right)$$

$$= 4{,}6F$$

Cálculo de $R_1$:

$$R_1 - R_2 = m_2 a \Rightarrow$$

$$R_1 = R_2 + m_2 a$$

$$= 4{,}6F + (4\rho LA)\left(\frac{0{,}4F}{\rho LA}\right)$$

$= 5{,}2F$

**Deformación de 3.**

La deformación por fuerza es debido a $3F$:

$$\Delta L_3 = \frac{3F4L}{YA} = 12\frac{FL}{YA}$$

La deformación por desplazamiento es debido a ser jalado por la fuerza $R_2 - 3F = 1{,}6\ F$

$$\Delta L'_3 = \frac{1{,}6F4L}{2YA} = 3{,}2\frac{FL}{YA}$$

Deformación total de 3:

$$\Delta L_{3Total} = 12\frac{FL}{YA} + 3{,}2\frac{FL}{YA} = 15{,}2\frac{FL}{YA}$$

**Deformación de 2.**

La deformación por fuerza es debido a $R_2$:

$$\Delta L_2 = \frac{R_2 2L}{YA} = 9{,}2\frac{FL}{YA}$$

La deformación por desplazamiento es debido a ser jalado por la fuerza

$R_1 - R_2 = 5{,}2\ F - 4{,}6\ F = 0{,}6\ F$

$$\Delta L'_2 = \frac{0{,}6F2L}{2YA} = 0{,}6\frac{FL}{YA}$$

Deformación total de 2:

$$\Delta L_{2Total} = 9{,}2\frac{FL}{YA} + 0{,}6\frac{FL}{YA}$$

$$= 9{,}8\frac{FL}{YA}$$

**Deformación de 1.**

La deformación por fuerza es debido a $R_1$:

$$\Delta L_1 = \frac{R_1 L}{Y2A} = 2{,}6\frac{FL}{YA}$$

La deformación por desplazamiento es debido a ser jalado por la fuerza $7F - R_1 = 1{,}8\ F$

$$\Delta L'_1 = \frac{1{,}8FL}{2Y2A} = 0{,}45\frac{FL}{YA}$$

Deformación total de 1:

$$\Delta L_{1Total} = 2{,}6\frac{FL}{YA} + 0{,}45\frac{FL}{YA}$$

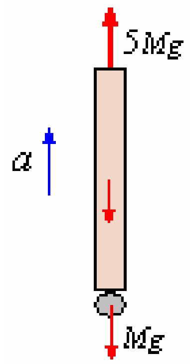
$$= 3{,}05\frac{FL}{YA}$$

**Deformación total del conjunto.**

$$\Delta L_{Total} = 15{,}2\frac{FL}{YA} + 9{,}8\frac{FL}{YA} + 3{,}05\frac{FL}{YA}$$

$$= 28{,}05\frac{FL}{YA}$$

**Ejemplo 17.** Una barra vertical de longitud $L$, masa $M$, sección transversal $A$ y módulo de Young $Y$, tiene soldada en su extremo inferior una masa puntual $M$. Si la barra se eleva verticalmente mediante una fuerza vertical $5Mg$ ($g$ = gravedad), aplicada en el extremo superior de la barra. Hallar la deformación longitudinal de la barra.

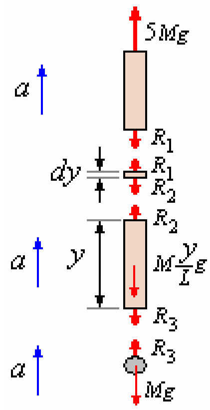



**Solución.**

Para calcular la aceleración de la barra aplicamos:

$$\sum F_y = ma_y$$

$$5Mg - Mg - Mg = 2Ma \Rightarrow a = \frac{3}{2}g$$




Tomemos un elemento diferencial de la barra $dy$

Aplicando la segunda ley de Newton al elemento de longitud $x$:

$$R_2 - R_3 - \left(M\frac{y}{L}\right)g = \left(M\frac{y}{L}\right)a$$

$$R_2 - R_3 = M\frac{y}{L}(g + a)$$

$$R_2 - R_3 = M\frac{y}{L}\left(g + \frac{3}{2}g\right) = \frac{5Mg}{2L}y \qquad (1)$$

Aplicando la segunda ley de Newton a la masa puntual:

$$R_3 - Mg = Ma = M\frac{3}{2}g \Rightarrow$$

$$R_3 = Mg + M\frac{3}{2}g = \frac{5}{2}Mg \qquad (2)$$

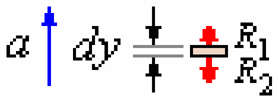
Reemplazando (2) en (1):

$$R_2 - \frac{5Mg}{2} = \frac{5Mg}{2L}y$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{5}{2}Mg\left(1 + \frac{y}{L}\right)$$

**Primer método.**

Comenzando con la deformación del elemento diferencial y luego integrar para toda la longitud.




El elemento diferencial se deforma $d(\Delta L)$ debido a la reacción $R_2$, $(R_1 - R_2)$ le da la aceleración $a = \frac{3}{2}g$, luego:

$$d(\Delta L) = \frac{R_2 dy}{YA} = \frac{\frac{5}{2}Mg\left(1+\frac{y}{L}\right)dy}{YA}$$

$$= \frac{5Mg}{2YA}\left(1+\frac{y}{L}\right)dy$$

Integrando:

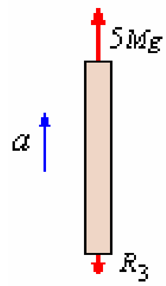
$$\Delta L = \frac{5Mg}{2YA}\int_0^L \left(1+\frac{y}{L}\right)dy = \frac{5Mg}{2YA}\left(L+\frac{L^2}{2L}\right)$$

$$= \frac{15MgL}{4YA}$$

**Segundo método.**

Comenzando con la deformación la los efectos de las fuerzas en los extremos de la barra.

Nota: En $R_3$ ya está considerado el peso de la masa puntual $M$ colocada en el extremo inferior de la barra.




Deformación de la barra por $5Mg$:

$$\Delta L_1 = \frac{1}{2}\frac{5MgL}{YA} = \frac{5MgL}{2YA}$$

Deformación de la barra por $R_3$:

$$\Delta L_2 = \frac{1}{2}\frac{5MgL}{2YA} = \frac{5MgL}{4YA}$$

Deformación total: $\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$

$$\Delta L = \frac{5MgL}{2YA} + \frac{5MgL}{4YA}$$

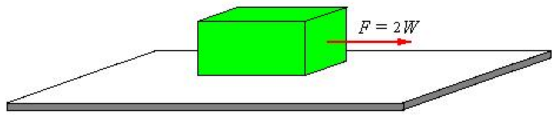
$$= \frac{15MgL}{4YA}$$

Aquí no se considera el efecto del peso propio por separado, porque en el cálculo de $R_2$ ya está considerado.

**Ejemplo 18.** Un cubo como se muestra en la figura de peso "$W$" arista "$L$" módulo de Young "$Y$" es arrastrado sobre un plano liso, con una fuerza $F = 2W$.

**a)** Hallar la deformación longitudinal unitaria cuando el plano es horizontal.

**b)** Hallar la deformación de la dimensión paralela al plano, cuando el bloque sube sobre el plano que esta inclinado 37º.




**Solución.**

**a)**

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{2}\frac{2W}{YL^2} = \frac{W}{YL^2}$$

**b)**

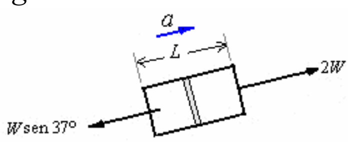
**Resuelto por integración.**

Calculo de la aceleración.

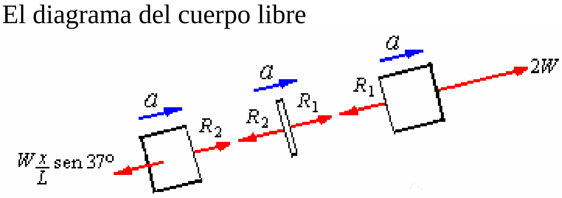
$$\sum F = ma \Rightarrow$$

$$2W - W\text{sen}37^\circ = \frac{W}{g}a \Rightarrow 2W - 0{,}6W = \frac{W}{g}a$$

$$\Rightarrow a = 1{,}4g$$




El diagrama del cuerpo libre




Cálculo de $R_2$:

$$R_2 - W\frac{x}{L}\text{sen}37^\circ = \frac{W}{g}\frac{x}{L}a \Rightarrow$$

$$R_2 = W\frac{0{,}6x}{L} + \frac{W}{g}\frac{x}{L}1{,}4g = 2W\frac{x}{L}$$

El elemento diferencial se deforma $d\Delta L$:

$$d\Delta L = \frac{R_2 dx}{YL^2} = \frac{2W}{YL^3}xdx$$

Para hallar $\Delta L$ integramos desde $x = 0$ hasta $x = L$.

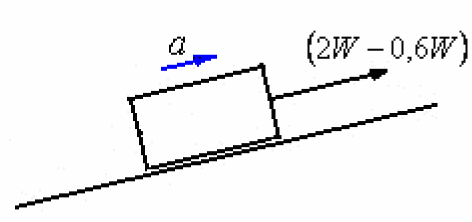
$$\Delta L = \int d\Delta L = \frac{2W}{YL^3}\int_0^L xdx = \frac{W}{YL}$$

La deformación es:

$$\Delta L = \frac{W}{YL}$$

**Resuelto directamente usando resultados conocidos.**

Estiramiento debido a la aceleración:




Calculo de la aceleración.

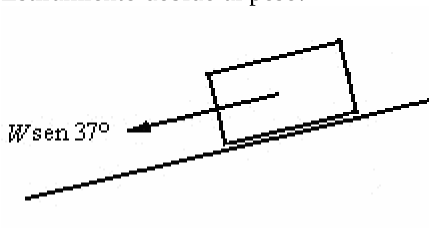
$$\sum F = ma \Rightarrow$$

$$2W - W\text{sen}37^{\circ} = \frac{W}{g}a \Rightarrow 2W - 0{,}6W = \frac{W}{g}a$$

$$\Rightarrow a = 1{,}4g$$

$$\Delta L_a = \frac{1}{2}\frac{(2W - 0{,}6W)L}{YL^2} = \frac{0{,}7W}{YL}$$

Estiramiento debido al peso:



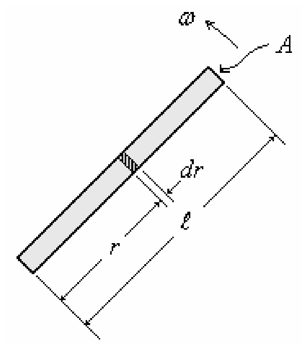

$$\Delta L_p = \frac{1}{2}\frac{0{,}6WL}{YL^2} = \frac{0{,}3W}{YL}$$

Estiramiento total:

$$\Delta L = \frac{0{,}7}{YL} + \frac{0{,}3W}{YL} = \frac{W}{YL}$$

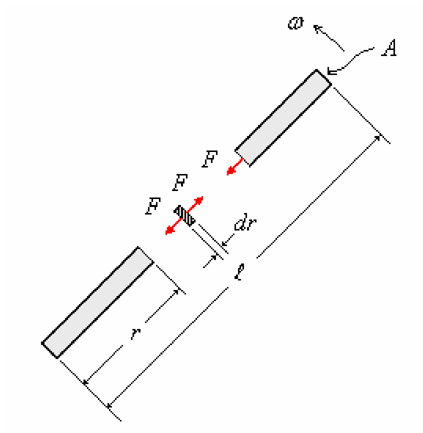
**Ejemplo 19**. **Deformación debido a la rotación**

Una barra de longitud $\ell$, área $A$, densidad $\rho$ y módulo de Young $Y$ gira con velocidad angular $\omega$ constante sobre una mesa horizontal sin fricción y pivotado en uno de sus extremos. Determinar el alargamiento producido. ¿Cuál será el esfuerzo máximo?

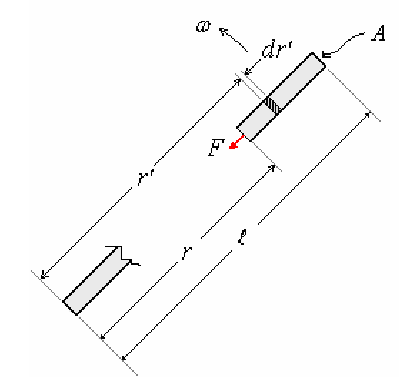



**Solución.**

El elemento diferencial se alarga $d(\Delta\ell)$, debido a la fuerza centrípeta producida por la masa restante hacia el extremo opuesto al pivote.




Parte 1: Cálculo de la fuerza total sobre una sección transversal a la distancia $r$ del pivote.




Debido a la aceleración centrípeta se tiene una fuerza:

$$dF = (dm)a_c = (dm)\omega^2 r$$

$$dm = \rho A dr'$$

$$dF = (\rho A dr')\omega^2 r' = \rho A\omega^2 r' dr'$$

Integrando:

$$F = \int_r^{\ell} \rho A\omega^2 r' dr' = \rho A\omega^2 \int_r^{\ell} r dr$$

$$F = \frac{1}{2}\rho A\omega^2\left(\ell^2 - r^2\right)$$

Parte 2: Cálculo del alargamiento

El alargamiento del elemento $dr$ es:

$$d(\Delta\ell) = \frac{Fdr}{YA}$$

Y el alargamiento total será:

$$\Delta\ell = \int_r^{\ell}\frac{Fdr}{YA} = \frac{\rho A\omega^2}{2YA}\int_r^{\ell}\left(\ell^2 - r^2\right)dr$$

$$\Delta\ell = \frac{\rho\omega^2}{2Y}\left(\ell^3 - \frac{\ell^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{\rho\omega^2\ell^3}{Y}$$

**Ejemplo 20.** Una barra de hierro de 100 mm$^2$ de sección y 50 cm de longitud gira alrededor de uno de sus extremos con una velocidad angular uniforme de $\omega$ radianes por segundo. Se pide cuál debe ser esta velocidad para que la barra se rompa por la tracción que origina la fuerza centrífuga, sabiendo que el material de que está hecha se rompe por tracción cuando se le carga con 30 kg por mm$^2$.

**Solución.**

Se romperá cuando

$F_c$ = (30x9,8) x100 = 29400 N.

Llamando $dm$ a un elemento de masa situado a la distancia $x$ del eje de giro, será:

$$dF_c = dm\omega^2 x = \rho dV\omega^2 x = \rho\omega^2 Axdx$$

Integrando:

$$F_c = \int_0^{0,5} \rho\omega^2 Axdx = \frac{1}{2}\rho\omega^2 Ax^2$$

$$= \frac{1}{2}(7800)\omega^2\left(100\times10^{-6}\right)\left(0,5^2\right)$$

Luego:

$$\frac{1}{2}(7800)\omega^2\left(100\times10^{-6}\right)\left(0,5^2\right) = 29400$$

Por tanto:

$$\omega^2 = \frac{2\times29400}{1950\times10^{-4}} = 301538, \quad \text{o sea}$$

$$\omega = \sqrt{301538} = 549 \text{ rad/s}.$$

**Ejemplo 21.** Determinar el máximo valor admisible de la velocidad lineal de rotación de un anillo fino de plomo, si la resistencia del plomo tiene el límite de rotura $P$ =2000 N/cm$^2$ y la densidad $\rho$ = 11,3 g/cm$^3$.

**Solución.**

Durante la rotación del anillo, en éste surge una tensión $T = mv^2/2\pi r$ .Para el anillo fino $m = 2\pi rS\rho$, donde S es la sección transversal del anillo. Por lo tanto, $T/S = \rho v^2$.

De allí el valor de la velocidad máxima es

$$v = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \approx 41 \text{ m/s}.$$

**Ejemplo 22.** Una barra homogénea de cobre de 1 m de longitud gira uniformemente alrededor de un eje vertical que pasa por uno de sus extremos.

¿A qué velocidad de rotación se romperá la barra?

Densidad del cobre $\rho = 8600\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, Esfuerzo de rotura del cobre $S_r = 2,45\times10^8\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^2}$

**Solución.**

La fuerza centrífuga que actúa sobre la barra en este caso es

$$F = \int_0^{\ell} r\omega^2 dm$$

Donde $\ell$ es *la* longitud de]a barra, $\omega$ es la velocidad angular de la rotación; $r$, la distancia que hay desde el elemento de masa $dm$ hasta el eje de rotación. Para una barra homogénea $dm = \rho Adr$, siendo $\rho$ la densidad de la sustancia que forma *la* barra y $A$, su sección. Integrando, obtenemos

$$F = \frac{\rho A\omega^2\ell^2}{2}$$

De donde el número límite de revoluciones por segundo será

$$S_r = \frac{F}{A} = \frac{\rho\omega^2\ell^2}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2S_r}{\rho\ell^2}},$$

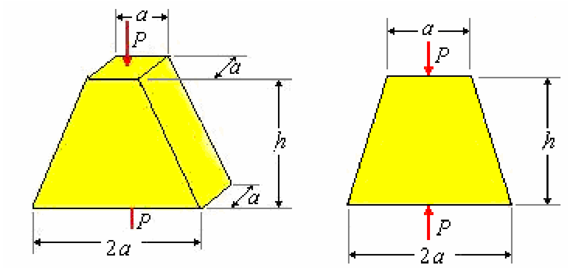
reemplazando valores;

$$\omega = \sqrt{\frac{2\left(2,45.10^8\right)}{(8600)(1)^2}} = 239\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

o $\dfrac{239}{2\pi} = 38 \text{ rev/s}$

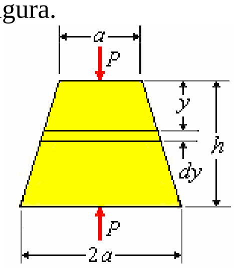
**Deformaciones no uniformes por área variable.**

**Ejemplo 23.** Calcular cuánto se comprime el bloque mostrado en la figura, cuando se le aplica una fuerza $P$. Módulo de elasticidad $Y$.



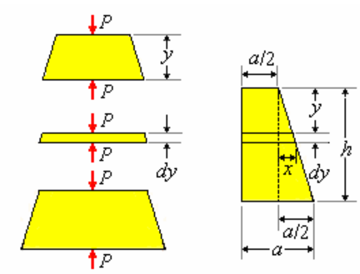

**Solución.**

Tomemos un elemento diferencial $dy$ tal como se muestra en la figura.




Según muestra el diagrama del cuerpo libre del elemento diferencial, es comprimido por la fuerza $P$. Este elemento disminuye su longitud $d(\Delta h)$, siendo $\Delta h$ la disminución de longitud de h debido a la fuerza $P$.

$$d(\Delta h) = \frac{Pdy}{YA}$$




Usando las figuras anteriores

$A = a(a + 2x)$ y $x = \dfrac{a}{2h} y$ reemplazando

obtenemos;

$$d(\Delta h) = \frac{Pdy}{Ya(a + \frac{a}{h} y)} \text{ o } d(\Delta h) = \frac{Phdy}{Ya^2(h + y)}$$

Luego, como

$$\Delta h = \int_0^h d(\Delta h) = \int_0^h \frac{Phdy}{Ya^2(h + y)}$$

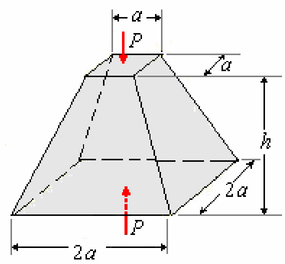
Integrando

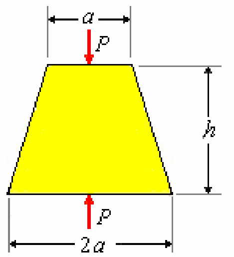
$$\Delta h = \frac{Ph}{Ya^2} \ln(h + y)_0^h = \frac{Ph}{Ya^2} \ln 2$$

El bloque se comprime $\Delta h = 0{,}692 \dfrac{Ph}{Ya^2}$

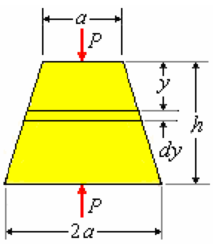
**Ejemplo 24.** Una pirámide truncada de bases cuadradas de lados ”*a*” y “2*a*” respectivamente de altura *h* y modulo elástico *Y* se somete en la dirección axial a una fuerza de compresión *P*, Determine la deformación que sufre la altura por acción de la fuerza *P*.

**Solución.**



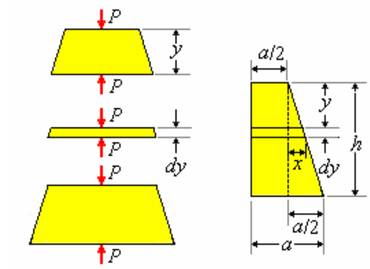




Tomemos un elemento diferencial *dy* tal como se muestra en la figura.




Según muestra el diagrama del cuerpo libre del elemento diferencial, es comprimido por la fuerza *P*. Este elemento disminuye su longitud *d*(Δ*h*), siendo Δ*h* la disminución de longitud de *h* debido a la fuerza *P*.

$$d(\Delta h) = \frac{Pdy}{YA}$$




Usando las figuras anteriores

$A = (a + 2x)^2$ y $x = \dfrac{a}{2h} y$ reemplazando

obtenemos;

$$d(\Delta h) = \frac{Ph^2 dy}{Ya^2(h + y)^2}$$

Luego, como

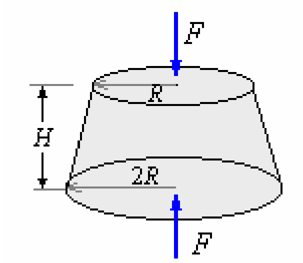
$$\Delta h = \int_0^h d(\Delta h) = \int_0^h \frac{Ph^2 dy}{Ya^2(h + y)^2}$$

Integrando

$$\Delta h = \frac{Ph}{2Ya^2}$$

El bloque se comprime $\Delta h = \dfrac{1}{2} \dfrac{Ph}{Ya^2}$

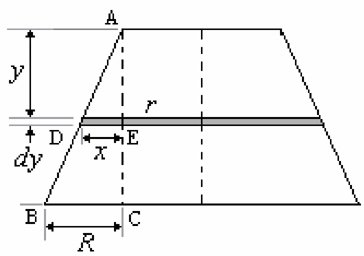
**Ejemplo 25.** Determine la deformación debido a la fuerza *F*, sin considerar el peso. El sólido mostrado de modulo elástico *Y* tiene altura *H* y bases circulares de radios *R* y 2*R*




**Solución.**

$$d(\Delta H) = \frac{Fdy}{Y\pi r^2}, \quad r = R + x$$

En los triángulos ABC y ADE:




$$\frac{y}{R} = \frac{x}{H} \Rightarrow x = \frac{R}{H} x$$

$$d(\Delta H) = \frac{F dy}{Y\pi(R+x)^2} = \frac{F}{\pi Y}\frac{dy}{\left(R+\frac{R}{H}x\right)^2}$$

$$= \frac{FH^2}{\pi R^2 Y}(H+x)^{-2} dy$$

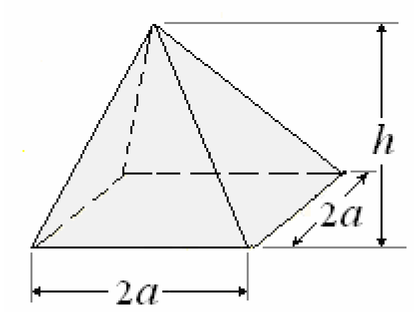
$$\Delta H = \int \Delta H = \frac{FH^2}{\pi R^2 Y}\int_0^H (H+x)^{-2} dy$$

$$= \frac{FH^2}{\pi R^2 Y}\left[\frac{(H+x)^{-1}}{-1}\right]_0^H$$

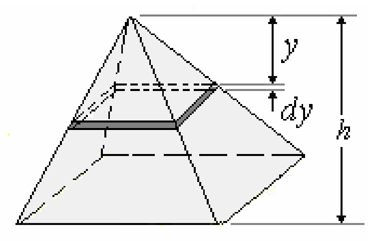
$$\Delta H = \frac{FH^2}{\pi R^2 Y}\left[\frac{1}{2H}\right] = \frac{FH}{2\pi R^2 Y}$$

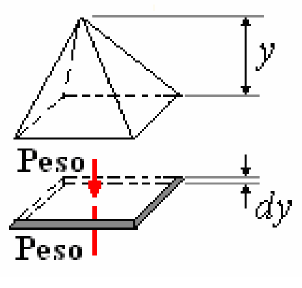
**Deformaciones no uniformes por peso propio y área variable.**

**Ejemplo 26.** Determine la deformación que sufre la altura de la Gran pirámide de Keops en Egipto debido a su propio peso, sabiendo que posee una altura de 147 m, su base es cuadrada de lado 230 m y que fue construida con bloques de piedra caliza y granito con módulo de Young = 35 x $10^9$ N/m$^2$ y densidad = 2400 kg / m$^3$.
**Solución.**

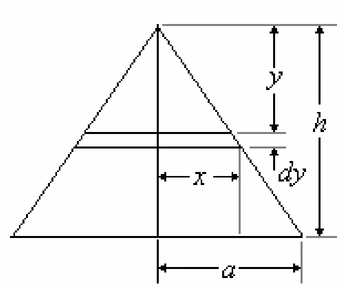



Tomemos un elemento diferencial $dy$, tal como de indica en la figura




Este elemento sufre una acortamiento $d(\Delta h)$, debido al peso de la porción de pirámide que soporta (de altura $y$, radio base de lado $2x$).




El peso que soporta es: $\text{Peso} = \rho g(\frac{1}{3}4x^2 y)$ el área de su base es: $A_x = 4x^2$

$$d(\Delta h) = \frac{\rho g 4x^2 y dy}{3Y4x^2} = \frac{\rho g}{3Y} y dy$$

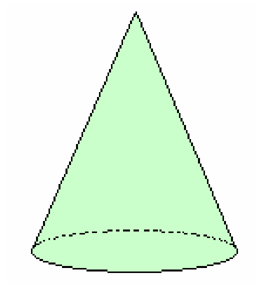
Integrando desde $y = 0$ hasta $y = h$

$$\Delta h = \int_0^h \frac{\rho g}{3Y} y dy = \frac{\rho g}{3Y}\frac{y^2}{2}\Big|_0^h = \frac{1}{2}\frac{\rho g h^2}{3Y}$$

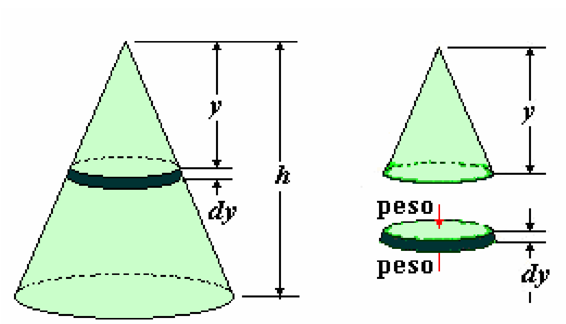
Como el Peso total es $\frac{\rho g A h}{3}$, obtenemos:

$$\Delta h = \frac{1}{2}\frac{(\text{Peso total})h}{Y(\text{Area base})}$$

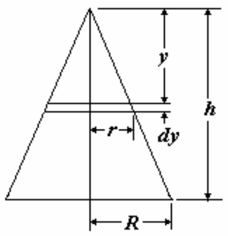
**Ejemplo 27.** Encontrar cuanto se comprime el cono de altura $h$ y base de área $A$ debido a su propio peso. El cono esta hecho de un material de densidad $\rho$ y módulo de elasticidad $Y$.



**Solución.**
Tomemos un elemento diferencial $dy$, tal como de indica en la figura




Este elemento sufre una acortamiento $d(\Delta h)$, debido al peso de la porción de cono que soporta (de altura y, radio de la base r).




El peso que soporta es: $peso = \rho g(\frac{1}{3}\pi r^2 y)$ el

área de su base es: $A = \pi r^2$

$$d(\Delta h) = \frac{\rho g \pi r^2 y dy}{3Y\pi r^2} = \frac{\rho g}{3Y} y dy$$

Integrando desde $y = 0$ hasta $y = h$

$$\Delta h = \int_0^h \frac{\rho g}{3Y} y dy = \frac{\rho g}{3Y} \frac{y^2}{2}\bigg|_0^h = \frac{1}{2}\frac{\rho g h^2}{3Y}$$

Como el Peso total es $\rho gAh/3$, obtenemos:

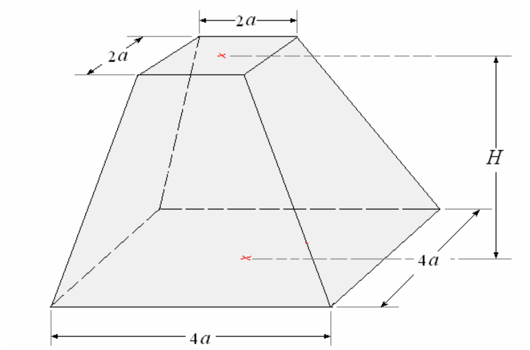
$$\Delta h = \frac{1}{2}\frac{(\text{Peso total})h}{Y(\text{Area base})}$$

**Ejemplo 28.** En la figura se muestra un tronco recto de pirámide regular de base cuadrada. Determinar cuánto se comprime el sólido homogéneo debido a su peso propio.

**Datos:** Densidad = $\rho$, gravedad = $g$, módulo de Young = $Y$

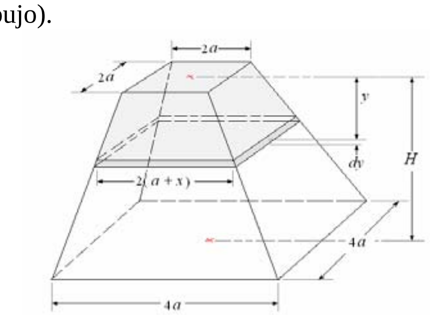
Lado de la base menor = $2a$; lado de la base mayor = $4a$

Altura del tronco de pirámide regular = $H$



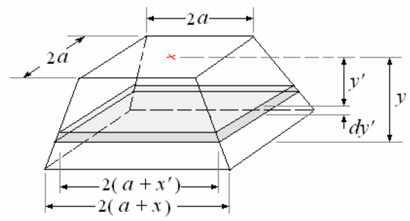

**Solución.**

Para determinar cuánto se comprime el sólido tomamos un elemento diferencial $dy$ y vemos cuanto se comprime por efecto del peso de la parte tronco de pirámide que está sobre él (la parte de altura $y$ en el dibujo).




Cálculo del peso de la de la parte tronco de pirámide que está sobre el elemento diferencial.

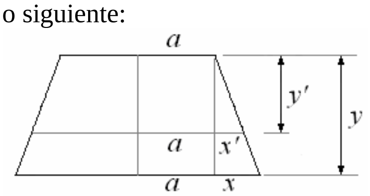
Para esto tomamos un elemento diferencial de altura $dy'$ y lo integramos desde $x = 0$ hasta $x = x'$.




El peso del elemento diferencial es:

$$dP = \rho g dV = \rho g 4(a + x')^2 dy'$$

Del dibujo siguiente:




Obtenemos:

$$y' = \frac{y}{x}x' \text{ y } dy' = \frac{y}{x}dx' :$$

$$dP = 4\rho g \frac{y}{x}(a + x')^2 dx'$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = x'$:

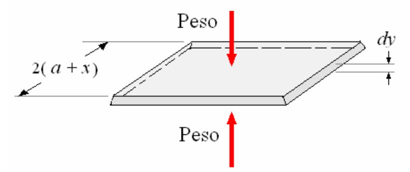
$$P = \int dP = 4\rho g \frac{y}{x}\int_0^{x'}(a + x')^2 dx'$$

$$= 4\rho g \frac{y}{x}\frac{(a + x')^3}{3}\bigg|_0^x$$

$$= \frac{4\rho g y}{3x}\left[(a + x)^3 - a^3\right]$$

El elemento diferencial se comprime:

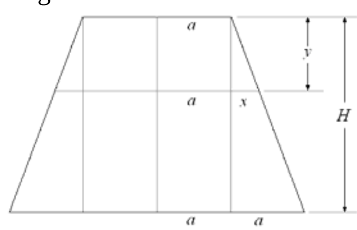
$$d(\Delta H) = \frac{Pdy}{YA} \text{ , } A = (2a + 2x)^2 = 4(a + x)^2$$




Reemplazando:

$$d(\Delta H) = \frac{4\rho g y}{3Yx}\frac{\left[(a + x)^3 - a^3\right]}{4(a + x)^2}dy$$

Del dibujo siguiente:




Obtenemos:

$$y = \frac{H}{a}x \ , \ dy = \frac{H}{a}dx :$$

$$d(\Delta H) = \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{a^2}\frac{\left[(a+x)^3 - a^3\right]}{(a+x)^2}dx$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{a^2}\left[a + x - a^3(a+x)^{-2}\right]dx$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = a$:

$$\Delta H = \int d(\Delta H)$$

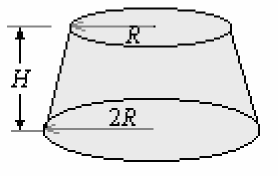
$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{a^2}\int_0^a \left[a + x - a^3(a+x)^{-2}\right]dx$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{a^2}\left[ax + \frac{x^2}{2} + \frac{a^3}{(a+x)}\right]_0^a$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{a^2}\left(a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} - a^2\right)$$

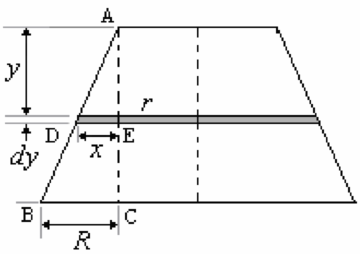
$$= \frac{1}{3}\frac{\rho g H^2}{Y}$$

**Ejemplo 29.** Determine la deformación que sufre la altura debido al peso propio
El sólido mostrado tiene peso $F$, modulo elástico $Y$, altura $H$ y bases circulares de radios $R$ y $2R$

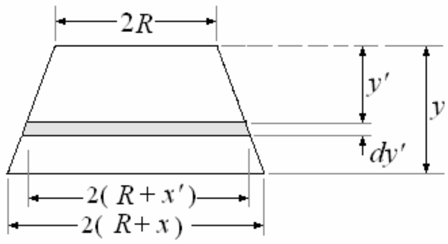



**Solución.**

Para determinar cuánto se comprime el sólido tomamos un elemento diferencial $dy$ y vemos cuanto se comprime por efecto del peso de la parte tronco de cono que está sobre él (la parte de altura $y$ en el dibujo).



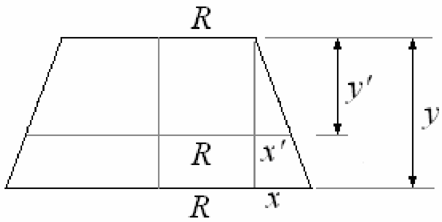

Cálculo del peso $P$ de la de la parte tronco de cono que está sobre el elemento diferencial.
Para esto tomamos un elemento diferencial de altura $dy'$ y lo integramos desde $x = 0$ hasta $x = x'$.




El peso del elemento diferencial es:

$$dP = \rho g dV = \rho g \pi (R + x')^2 dy'$$

Del dibujo siguiente:




Obtenemos:

$$y' = \frac{y}{x}x' \text{ y } dy' = \frac{y}{x}dx' :$$

$$dP = \rho g \pi \frac{y}{x}(R + x')^2 dx'$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = x'$:

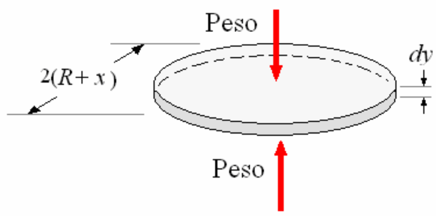
$$P = \int dP = \rho g \pi \frac{y}{x}\int_0^{x'}(R + x')^2 dx'$$

$$= \rho g \pi \frac{y}{x}\frac{(R + x')^3}{3}\Bigg|_0^x$$

$$= \frac{\rho g \pi y}{3x}\left[(R + x)^3 - R^3\right]$$

El elemento diferencial se comprime:

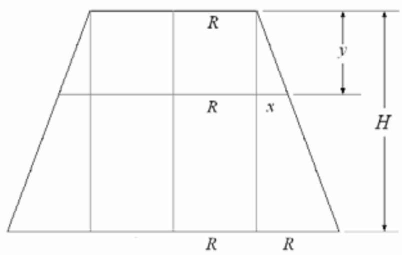
$$d(\Delta H) = \frac{P dy}{YA} \ , \ A = \pi (R + x)^2$$




Reemplazando:

$$d(\Delta H) = \frac{\rho g \pi y}{3Yx}\frac{\left[(R + x)^3 - R^3\right]}{\pi (R + x)^2}dy$$

Del dibujo siguiente:




Obtenemos:

$$y = \frac{H}{R}x \text{ , } dy = \frac{H}{R}dx :$$

$$d(\Delta H) = \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{R^2}\frac{\left[(R+x)^3 - R^3\right]}{(R+x)^2}dx$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{R^2}\left[R + x - R^3(R+x)^{-2}\right]dx$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = R$:

$$\Delta H = \int d(\Delta H)$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{R^2}\int_0^R \left[R + x - R^3(R+x)^{-2}\right]dx$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{R^2}\left[Rx + \frac{x^2}{2} + \frac{R^3}{(a+x)}\right]_0^R$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{R^2}\left(R^2 + \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} - R^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\rho g H^2}{Y}$$

El peso del tronco de cono es:

$$F = \frac{1}{3}\pi(2R)^2(2H)\rho g - \frac{1}{3}\pi(R)^2(H)\rho g$$

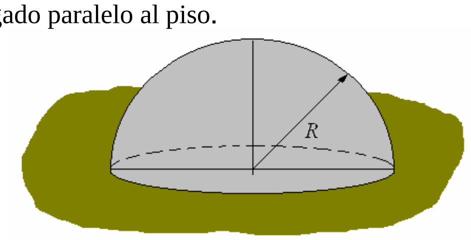
$$= \frac{1}{3}\pi R^2 H\rho g(8-1) = \frac{7}{3}\pi R^2 H\rho g$$

Luego

$$\Delta H = \frac{F}{\frac{7}{3}\pi R^2 H\rho g}\frac{1}{3}\frac{\rho g H^2}{Y}$$

$$= \frac{FH}{7\pi R^2 Y}$$

**Ejemplo 30.** Un hemisferio (mitad de una esfera sólida) de densidad $\rho$ , radio $R$ y modulo de Young $Y$ esta sobre el piso descansando sobre su base circular determine cuanto se deforma por acción de su propio peso.
Sugerencia: Calcule la deformación de una porción diferencial del hemisferio formada por un disco delgado paralelo al piso.




**Solución.**

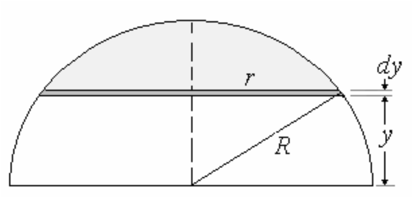
Vamos a considerar un elemento diferencial de área $A = \pi r^2$ , altura $dy$

Donde $r^2 = (R^2 - y^2)$

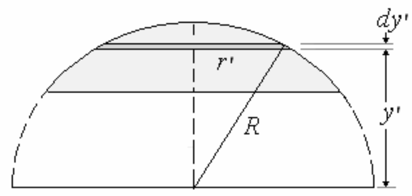
El elemento diferencial soporta el peso $P$ de la parte de hemisferio que está sobre él.

De tal manera que se deforma:

$$d(\Delta R) = \frac{P_{(y)}dy}{YA}$$




Cálculo de $P_{(y)}$




Peso del elemento diferencial

$$dP_{(y)} = \rho\pi g\left(R^2 - y'^2\right)dy'$$

El peso $P_{(y)}$ de la porción de hemisferio es:

$$P_{(y)} = \rho\pi g\int_y^R (R^2 - y'^2)dy' =$$

$$\rho g\pi\left(\frac{2R^3}{3} - R^2 y + \frac{y^3}{3}\right)$$

Ahora la deformación total Integrando

$$d(\Delta R) = \frac{P_{(y)}dy}{YA} :$$

$$d(\Delta R) = \frac{g\pi\left(\frac{2R^3}{3} - R^2 y + \frac{y^3}{3}\right)dy}{Y\pi\left(R^2 - y^2\right)}$$

$$\Delta R = \rho g\pi\frac{1}{Y}\int_0^R\left(\frac{2R^3}{3} - R^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\frac{dy}{(R^2 - y^2)}$$

$$= \frac{\rho g}{Y}\int_0^R \frac{\left(\frac{2}{3}R^3 - \frac{2}{3}R^2 y\right) + \left(-\frac{1}{3}R^2 y + \frac{1}{3}y^3\right)}{\left(R^2 - y^2\right)}dy$$

$$= \frac{\rho g}{Y}\int_0^R \frac{\frac{2R^2}{3}(R-y) - \frac{y}{3}\left(R^2 - y^2\right)}{(R-y)(R+y)}dy$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\int_0^R \left[\frac{2R^2}{(R+y)} - y\right] dy$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\left[2R^2 \ln(R+y) - \frac{y^2}{2}\right]_0^R$$

$$= \frac{\rho g R^2}{3Y}\left(2\ln 2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{0{,}30\rho g R^2}{Y}$$

La altura del hemisferio disminuye

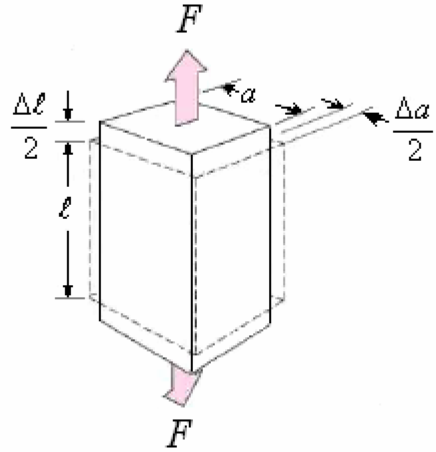
$$\Delta R = \frac{0{,}30\rho g R^2}{Y} \text{ Debido al peso propio}$$

**DEFORMACION LATERAL MODULO DE POISSON**

Adicionalmente, cuando estiramos un bloque en una dirección éste se contrae en las dimensiones perpendiculares al estiramiento, la contracción de las caras laterales es en la misma proporción para el ancho ($a$) y el alto ($h$). Por ejemplo, la contracción $\Delta a$ en el ancho es proporcional al ancho a y también a $\frac{\Delta \ell}{\ell}$, lo que resumimos en la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta h}{h} = -\sigma \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

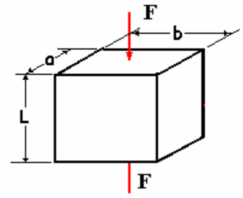
Donde σ es otra constante del material conocida como **el módulo de Poisson.**




Como valores aproximados para algunos materiales se puede tomar:
0,28 para hierro y acero, 0,5 para caucho y 0,25 para vidrio.
Las dos constantes $Y$ y $\sigma$ especifican completamente las propiedades de un material homogéneo isotrópico.

| Nombre | Módulo de Poisson $\sigma$ Sin dimensiones |
|---|---|
| Aluminio | 0,34 |
| Acero | 0,28 |
| Cobre | 0,35 |
| Oro | 0,41 |
| Hierro, fundido | 0,28 |
| Plomo | 0,33 |
| Nickel | 0,30 |
| Platino | 0,38 |
| Plata | 0,37 |
| Latón | 0,33 |

**Ejemplo 31.** El paralelepípedo de la figura está hecho de un material con módulo de Young $Y$, y constante poisson $\sigma$. ¿Cuál es el valor de $\Delta V/V$?




**Solución.**
Debido a la compresión ocasionada por la fuerza F:

$$\frac{\Delta L}{L} = -\frac{F}{YA} \text{ y como } \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = -\sigma\frac{\Delta L}{L}$$

Obtenemos: $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = \sigma\frac{F}{YA}$

Como $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$

Reemplazando

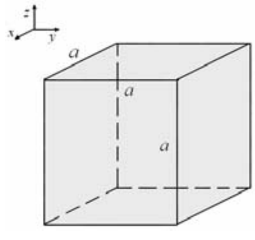
$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{F}{YA} + \sigma\frac{F}{YA} + \sigma\frac{F}{YA}$$

Finalmente:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{F}{YA}(1-2\sigma)$$

**Ejemplo 32.** Al cubo de la figura de lado 50cm se le aplica dos pares de fuerzas $F_x$=100 N y $F_y$=50 N obteniendo como resultado que la longitud en el eje $x$ aumenta en 0,01% y la longitud en el eje $y$ disminuye en 0,006%.

a) Determine si el esfuerzo en $x,y$ es de tracción o compresión.
b) Determine el módulo de Young y la constante de Poisson.



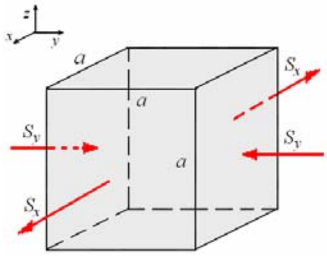

**Solución.**

a) $S_x = \frac{100}{(0{,}5)^2}$ = 400 N/m², $S_y = \frac{50}{(0{,}5)^2}$ = 200 N/m²

$$\frac{\Delta a_x}{a} = \frac{0{,}01}{100} = 1\times10^{-4},$$
$$\frac{\Delta a_y}{a} = -\frac{0{,}006}{100} = -6\times10^{-5}$$

Haciendo un análisis de los cambios de longitudes:
El esfuerzo en $x$ es mayor y la longitud en $x$ aumenta mientras que en $y$ disminuye, siendo el esfuerzo en $y$ menor, se puede concluir que el esfuerzo en $x$ es de tracción y el esfuerzo en $y$ es de compresión.

b) El paralelepípedo esta sujeto a esfuerzo por cuatro caras, como se muestra en la figura siguiente:




Sea $S$ el esfuerzo sobre cada una de las caras laterales.
La deformación del lado horizontal $a_x$ es:

$$\frac{\Delta a_x}{a} = \frac{400}{Y} + \sigma\frac{200}{Y} = 1\times10^{-4} \qquad (1)$$

La deformación del lado horizontal $a_y$ es:

$$\frac{\Delta a_y}{a} = -\frac{200}{Y} - \sigma\frac{400}{Y} = -0{,}6\times10^{-4} \qquad (2)$$

Restando (1) + (2)/2, obtenemos:

$$\frac{400}{Y} - \frac{100}{Y} = 0{,}7\times10^{-4} \Rightarrow \frac{300}{Y} = 0{,}7\times10^{-4}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{300}{0{,}7\times10^{-4}} = 4{,}28 \text{ x } 10^{6} \text{ N/m}^2$$

Reemplazando el valor de $Y$ en (1):

$$\frac{400}{4{,}28\times10^6} + \sigma\frac{200}{4{,}28\times10^6} = 1\times10^{-4} \Rightarrow$$
$$4 + 2\sigma = 4{,}28$$
$$\Rightarrow \sigma = 0{,}14$$

**Ejemplo 33.** a) Calcule la deformación volumétrica durante la extensión elástica de una barra cilíndrica sometida a tracción axial. El material es isótropo y la deformación se supone pequeña.
b) ¿Para qué valor del módulo de Poisson, el alargamiento ocurre sin cambio de volumen?
c) El módulo de Poisson de la mayoría de metales es aprox. 0,3. El del corcho, aprox. 0,0 y el del caucho cercano a 0,5. ¿Cuáles son las deformaciones volumétricas de esos materiales al someterlos a una compresión elástica $\varepsilon < 0$?
**Solución.**

a) Para la altura $\frac{\Delta h}{h} = \frac{S}{Y}$, para el diámetro

$$\frac{\Delta D}{D} = -\sigma\frac{\Delta h}{h} = -\sigma\frac{S}{Y}$$

El cambio de volumen es $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta h}{h} + 2\frac{\Delta D}{D} =$

$\frac{S}{Y} - 2\sigma\frac{S}{Y} = \frac{S}{Y}(1-2\sigma)$, por lo tanto

$$\Delta V = \frac{S}{Y}(1-2\sigma)V = \frac{S}{Y}(1-2\sigma)\frac{\pi D^2 h}{4}$$

b) $\Delta V$ es igual a cero cuando $(1-2\sigma) = 0 \Rightarrow$
$\sigma = 0{,}5$

c) Para la mayoría de metales con un valor de $\sigma$ aproximado a 0,3:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{S}{Y}[1-2(0{,}3)] = 0{,}4\frac{S}{Y}$$

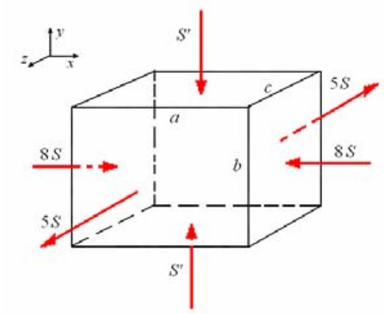
Para el corcho, con un valor de $\sigma$ aproximado a 0,0:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{S}{Y}[1-2(0{,}0)] = \frac{S}{Y}$$

Para el caucho, con un valor de $\sigma$ aproximado a 0,5:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{S}{Y}[1-2(0{,}5)] = 0{,}0$$

**Ejemplo 34.** El sólido de la figura está sometido a los esfuerzos de compresión y tracción mostrados en las direcciones $x$ y $z$, respectivamente. Determine cual será el esfuerzo ($S'$) en la dirección $y$, tal que la deformación unitaria en esa dirección sea nula.
Datos: $S$ = esfuerzo, $Y$ = módulo de Young, $\sigma$ = módulo de Poisson.



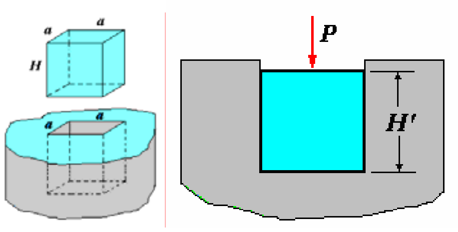

**Solución.**

| | $\frac{\Delta a}{a}$ | $\frac{\Delta b}{b}$ | $\frac{\Delta c}{c}$ |
|---|---|---|---|
| Por $-8S$ en el eje $x$ | $\frac{-8S}{Y}$ | $\frac{\sigma 8S}{Y}$ | $\frac{\sigma 8S}{Y}$ |
| por - $S'$ en el eje $y$ | $\frac{\sigma S'}{Y}$ | $-\frac{S'}{Y}$ | $\frac{\sigma S'}{Y}$ |
| Por $-5S$ en el eje $z$ | $-\frac{\sigma 5S}{Y}$ | $-\frac{\sigma 5S}{Y}$ | $\frac{5S}{Y}$ |
| Deformación total | | $\frac{1}{Y}(3\sigma S - S')$ | |

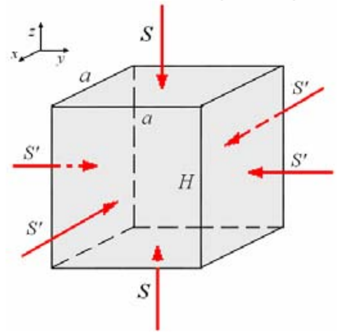
Para que la deformación unitaria en la dirección $y$ sea nula, se debe cumplir:

$$\frac{1}{Y}(3\sigma S - S') = 0 \Rightarrow 3\sigma S - S' = 0 \Rightarrow$$
$$S' = 3\sigma S$$

**Ejemplo 35.** Se tiene el paralelepípedo mostrado en la figura que encaja perfectamente en una caja rígida. Luego de encajo el paralelepípedo se coloca un peso *P* sobre éste, tal que lo aplasta uniformemente, la caja impide las expansiones laterales.
a) ¿Cuál es el esfuerzo sobre las paredes laterales?
b) ¿Cuál es el cambio en la altura $\Delta H = H - H'$ del paralelepípedo?




**Solución.**
El paralelepípedo esta sujeto a esfuerzo por sus seis caras, como se muestra en la figura siguiente:




Sea *S* el esfuerzo sobre la cara superior e inferior y *S*' el esfuerzo sobre cada una de las caras laterales.
La deformación del lado *a* es:

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{S'}{Y} + \sigma\frac{S'}{Y} + \sigma\frac{S}{Y} \quad (1)$$

La deformación del lado *H* es:

$$\frac{\Delta H}{H} = -\frac{S}{Y} + 2\sigma\frac{S'}{Y} \quad (2)$$

a) Como la longitud *a* no cambia, $\Delta a = 0$.
De la ecuación (1):

$$-\frac{S'}{Y} + \sigma\frac{S'}{Y} + \sigma\frac{S}{Y} = 0 \Rightarrow S' = \frac{\sigma}{(1-\sigma)}S$$

Siendo $S = \frac{P}{a^2}$

$$\Rightarrow S' = \frac{\sigma P}{(1-\sigma)a^2}$$

b) De la ecuación (2):

$$\frac{\Delta H}{H} = -\frac{S}{Y} + 2\sigma\frac{S'}{Y} \Rightarrow$$
$$\frac{\Delta H}{H} = -\frac{S}{Y} + \frac{2\sigma^2}{(1-\sigma)}\frac{S}{Y} \Rightarrow$$
$$\frac{\Delta H}{H} = -\frac{S}{Y}\left[1 - \frac{2\sigma^2}{(1-\sigma)}\right] \Rightarrow$$
$$\Delta H = -\frac{P}{Ya^2}\left[1 - \frac{2\sigma^2}{(1-\sigma)}\right]H$$

**Ejemplo 36.** Hallar el valor del módulo de Poisson para el cual el volumen de un alambre no varía al alargarse.
**Solución.**
$\frac{\Delta r}{r} = \sigma\frac{\Delta \ell}{\ell}$, de aquí el módulo de Poisson

$\sigma = \frac{\frac{\Delta r}{r}}{\frac{\Delta \ell}{\ell}}$, siendo *r* el radio del alambre y $\ell$ su longitud. El volumen de dicho alambre antes de estirarlo es $V_1 = \pi r^2 \ell$ y su volumen después de estirado es $V_2 = \pi(r - \Delta r)^2(\ell + \Delta \ell)$
Si el volumen no varió con el alargamiento, tendremos que $\pi r^2 \ell = \pi(r - \Delta r)^2(\ell + \Delta \ell)$. Y abriendo los paréntesis y despreciando las magnitudes $\Delta r$ y $\Delta \ell$ al cuadrado, hallamos que

$\pi r^2 \ell = 2\pi r \Delta r \ell$, de donde $\frac{\frac{\Delta r}{r}}{\frac{\Delta \ell}{\ell}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$, luego

$\sigma$ = 0,5.

**Ejemplo 37.** Hallar la variación relativa de la densidad de una barra de cobre cilíndrica al ser comprimida por una presión $p$ = 9810 Pa. Para el cobre tómese un módulo de Poisson $\sigma$ = 0,34.
**Solución.**

La densidad de la barra antes de ser comprimida es

$\rho_1 = \frac{m}{V_1}$ donde $V_1 = \pi r^2 \ell$. La densidad de la barra después de comprimida será $\rho_2 = \frac{m}{V_2}$,

siendo $V_2 = \pi(r + \Delta r)^2(\ell - \Delta \ell)$. Por consiguiente la variación de la densidad será

$$\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1 = m\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) = \frac{m\Delta V}{V_2 V_1}$$

Como .la compresión no es muy grande, aproximadamente se puede tomar $V_2 V_1 = V_1^2$

Se puede considerar que $\Delta\rho = \dfrac{m\Delta V}{V_1^2}$ .

Entonces la variación elativa de la densidad $\dfrac{\Delta\rho}{\rho_1} = \dfrac{\Delta V}{V_1}$ . Hallemos pues la variación de volumen $\Delta V = \pi r^2 \ell - \pi(r + \Delta r)^2(\ell - \Delta\ell)$.

Abriendo los paréntesis y despreciando los cuadrados de las magnitudes $\Delta r$ y $\Delta\ell$, obtenemos que $\Delta V = V_1\left(\dfrac{\Delta\ell}{\ell}\right)(1-2\sigma)$, .donde $\sigma$ es el módulo de Poisson. Por lo tanto

$\dfrac{\Delta\rho}{\rho_1} = \dfrac{\Delta V}{V_1} = \dfrac{\Delta\ell}{\ell}(1-2\sigma)$. Pero como por la ley de Hooke $\dfrac{\Delta\ell}{\ell} = \dfrac{p_n}{Y}$ , tendremos que en definitiva

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_1} = \frac{p_n}{Y}(1-2\sigma).$$

En nuestro caso $p_n = 9{,}81\times 10^3 \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$ ,

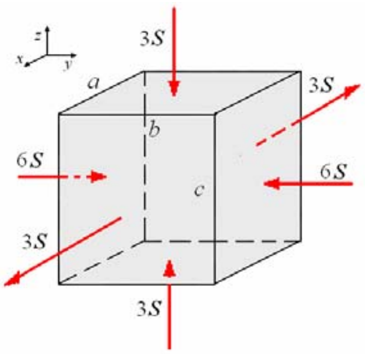
$Y = 1{,}18\times 10^{11}\dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$ y $\sigma$ = 0,34. Poniendo estos datos obtenemos que $\dfrac{\Delta\rho}{\rho_1} = \dfrac{\Delta V}{V_1} = 0{,}027\,\%$..

**Ejemplo 38.** El sólido de la figura (lados *a*, *b* y *c*) está sometido a los esfuerzos de compresión y tensión mostrados.

Determine la deformación volumétrica unitaria, $\Delta V / V$ .

Datos:

*S* = esfuerzo, *Y* = módulo de Young, $\sigma$ = módulo de Poisson.




**Solución.**

Deformación de cada uno de los lados:

| | Deformación de *a* |
|---|---|
| Por 3*S* en el eje *x* | $\dfrac{\Delta a}{a} = \dfrac{3S}{Y}$ |
| Por -6*S* en el eje *y* | $\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{\Delta b}{b} = \sigma\dfrac{6S}{Y}$ |
| Por -3*S* en el eje *y* | $\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{\Delta c}{c} = \sigma\dfrac{3S}{Y}$ |
| Deformación total | $\left(\dfrac{\Delta a}{a}\right)total = \dfrac{3S}{Y}(1+3\sigma)$ |

| | Deformación de *b* |
|---|---|
| Por 3*S* en el eje *x* | $\dfrac{\Delta b}{b} = -\sigma\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{3S}{Y}$ |
| Por -6*S* en el eje *y* | $\dfrac{\Delta b}{b} = -\dfrac{6S}{Y}$ |
| Por -3*S* en el eje *y* | $\dfrac{\Delta b}{b} = -\sigma\dfrac{\Delta c}{c} = \sigma\dfrac{3S}{Y}$ |
| Deformación total | $\left(\dfrac{\Delta b}{b}\right)total = -\dfrac{6S}{Y}$ |

| | Deformación de *c* |
|---|---|
| Por 3*S* en el eje *x* | $\dfrac{\Delta c}{c} = -\sigma\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{3S}{Y}$ |
| Por -6*S* en el eje *y* | $\dfrac{\Delta c}{c} = -\sigma\dfrac{\Delta b}{b} = \sigma\dfrac{6S}{Y}$ |
| Por -3*S* en el eje *y* | $\dfrac{\Delta c}{c} = -\dfrac{3S}{Y}$ |
| Deformación total | $\left(\dfrac{\Delta c}{c}\right)total = \dfrac{3S}{Y}(-1+\sigma)$ |

Consolidado

| | Deformación de *a* | Deformación de *b* | Deformación de *c* |
|---|---|---|---|
| Por 3*S* en el eje *x* | $\dfrac{\Delta a}{a} = \dfrac{3S}{Y}$ | $\dfrac{\Delta b}{b} = -\sigma\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{3S}{Y}$ | $\dfrac{\Delta c}{c} = -\sigma\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{3S}{Y}$ |
| Por -6*S* en el eje *y* | $\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{\Delta b}{b} = \sigma\dfrac{6S}{Y}$ | $\dfrac{\Delta b}{b} = -\dfrac{6S}{Y}$ | $\dfrac{\Delta c}{c} = -\sigma\dfrac{\Delta b}{b} = \sigma\dfrac{6S}{Y}$ |
| Por -3*S* en el eje *y* | $\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{\Delta c}{c} = \sigma\dfrac{3S}{Y}$ | $\dfrac{\Delta b}{b} = -\sigma\dfrac{\Delta c}{c} = \sigma\dfrac{3S}{Y}$ | $\dfrac{\Delta c}{c} = -\dfrac{3S}{Y}$ |
| Deformación total | $\left(\dfrac{\Delta a}{a}\right)total = \dfrac{3S}{Y}(1+3\sigma)$ | $\left(\dfrac{\Delta b}{b}\right)total = -\dfrac{6S}{Y}$ | $\left(\dfrac{\Delta c}{c}\right)total = \dfrac{3S}{Y}(-1+\sigma)$ |

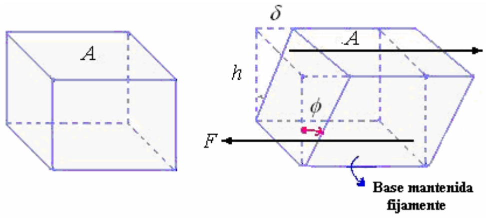
$$\frac{\Delta V}{V} = \left(\frac{\Delta a}{a}\right)total + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)total + \left(\frac{\Delta c}{c}\right)total$$

$$= \frac{3S}{Y}(4\sigma) - \frac{6S}{Y} = \frac{6S}{Y}(2\sigma - 1)$$

**DEFORMACIÓN POR CIZALLADURA O CORTE. MODULO DE CIZALLADURA O RIGIDEZ.**

**Deformación por cizalladura**

Ya hemos estudiado el módulo de elasticidad Y de un material, es decir, la respuesta del material cuando sobre él actúa una fuerza que cambia su volumen (aumentando su longitud). Ahora, examinaremos la deformación por cizalladura en el que no hay cambio de volumen pero si de forma. Definimos el esfuerzo como *F*/*A* la razón entre la fuerza tangencial al área *A* de la cara sobre la que se aplica. La deformación por cizalla, se define como la razón $\Delta x/h$, donde $\Delta$x es la distancia horizontal que se desplaza la cara sobre la que se aplica la fuerza y *h* la altura del cuerpo, tal como vemos en la figura.




Cuando la fuerza *F* que actúa sobre el cuerpo es paralela a una de las caras mientras que la otra cara permanece fija, se presenta otro tipo de deformación denominada de cizalladura en el que no hay cambio de volumen pero si de forma. Si originalmente el cuerpo tiene forma rectangular, bajo un esfuerzo cortante la sección transversal se convierte en un paralelogramo.

El módulo de cizalladura o de rigidez G es una propiedad mecánica de cada material

Siendo pequeños los ángulos de desplazamiento podemos escribir

$$Deformación = \frac{\delta}{h} = \tan\phi \approx \phi$$

$$G = \frac{esfuerzo}{deformación} = \frac{F/A}{\delta/h} = \frac{S_t}{\phi}$$

La ley de Hooke para la deformación por cizalladura se puede escribirla de modo siguiente:

$$S_t = G\phi$$

El módulo de cizalladura G es característico de cada material

| Nombre | Módulo de rigidez *G* $10^{10}$ N/m$^2$ |
|---|---|
| Aluminio | 2,5 |
| Cobre | 4,3 |
| Oro | 3,5 |
| Hierro, fundido | 3,2 |
| Plomo | 0,6 |
| Nickel | 7,4 |
| Acero | 7,5 |
| Latón | 1,7 |

**Ejemplo 39.** Un cubo de gelatina de 30 cm de arista tiene una cara sujeta mientras que a la cara opuesta se le aplica una fuerza tangencial de 1 N. La superficie a la que se aplica la fuerza se desplaza 1 cm.
a) ¿Cuál es el esfuerzo de corte?
b) ¿Cuál es la deformación de corte?
c) ¿Cuál es el módulo de corte?

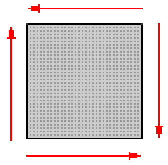
**Solución.**

a) $S_t = \frac{F}{A} = \frac{1}{(0{,}30)^2} = 11{,}11\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

b) $\delta = \frac{\Delta x}{h} = \frac{1}{30} = 0{,}033$

c) $G = \frac{S_t}{\delta} = \frac{11{,}11}{0{,}033} = 333{,}33$

**Ejemplo 40.** Un cubo de acero de 5 cm de arista se halla sometido a 4 fuerzas cortantes, de 1200 kg, cada una, aplicadas en sentidos opuestos sobre caras opuestas. Calcule la deformación por cizalladura.



**Solución.**

$G_{\text{Acero al carbono}}$ = 8 x$10^9$ N/m$^2$

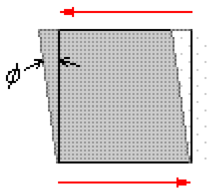
$$G = \frac{esfuerzo}{deformación} = \frac{F/A}{\delta/h} = \frac{S_t}{\phi}$$

$$S_t = \frac{F}{A} = \frac{(1200(9{,}8))}{(0{,}05)^2} = 4{,}704 \text{ x}10^6 \text{ N/m}^2$$

Consideremos solamente las fuerzas horizontales, estas producen una deformación $\phi$, como se muestra en la figura

$$\phi = \frac{S_t}{G} = \frac{4{,}704\times10^6}{8\times10^9} = 0{,}588 \text{ x}10^{-3}$$

radianes

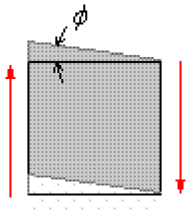



La cara que se muestra queda como un rombo con ángulos $\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)$

Consideremos ahora solamente las fuerzas verticales, estas producen una deformación también $\phi$, como se muestra en la figura

$$\phi = \frac{S_t}{G} = \frac{4{,}704\times10^6}{8\times10^9} = 0{,}588 \text{ x}10^{-3}$$

radianes



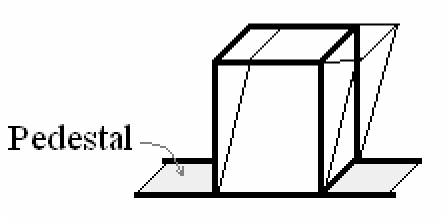

El cubo se deforma en el plano del papel y toma la forma de un rombo con ángulos

$$\left(\frac{\pi}{2}-2\phi\right) \text{ y } \left(\frac{\pi}{2}+2\phi\right)$$

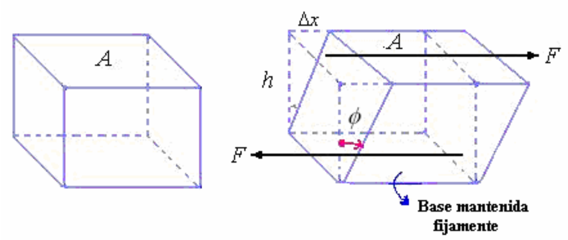
**Ejemplo 41.** Una estatua se encuentra soldada a un pedestal de latón, que se muestra en la figura. Al producirse un movimiento sísmico se observa un desplazamiento lateral de la cara superior del pedestal de 0,25mm.

Calcular:

a) El esfuerzo de corte.
b) La magnitud de la fuerza producida por el movimiento sísmico.
El pedestal de latón tiene una altura de 1m y una sección cuadrada de 0,5m de lado.
El módulo de Young del latón es $3{,}5\text{x}10^{10}$ Pa
Módulo de rigidez $G$ del latón es $1{,}7\ \text{x}10^{10}$ N/m$^2$




**Solución.**
Desplazamiento lateral de la cara superior del pedestal de 0,25mm.




a) El esfuerzo de corte.

$$\delta = \frac{\Delta x}{h} = \frac{0{,}25\times10^{-3}}{1{,}00} = 0{,}25\times10^{-3}$$

$$G = \frac{S_t}{\delta} \Rightarrow$$

$S_t = G\delta$ = (1,7 x 10$^{10}$)(0,25 x10$^{-3}$)

= 0,425 x 10$^7$ N/m$^2$

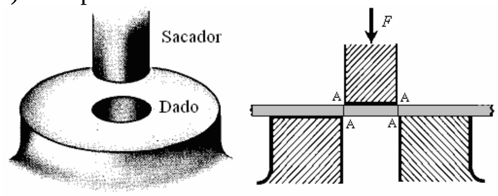
b) La magnitud de la fuerza producida por el movimiento sísmico.

$$S_t = \frac{F}{A} \Rightarrow$$

$F = S_t A$ = (0,425 x 10$^7$)(0,5$^2$)

= 2,65 x 10$^5$ N

**Ejemplo 42.** El acero promedio requiere, típicamente, un esfuerzo de 3,45 x 10$^8$ N/m$^2$ para la ruptura por cizalladura. Determine la fuerza requerida para perforar un agujero del diámetro 2,5 cm en una placa de acero de ¼ de pulgada (6,25 mm) de espesor.



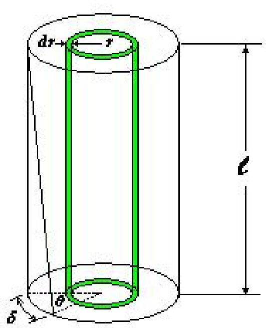

**Solución.**
La circunferencia de un círculo del diámetro $D$ = 2,5 cm es $C = \pi D = 7{,}85x10^{-2}\,\text{m}$, El área del borde del disco cortado AAAA es el producto de la circunferencia $C$ por el espesor del material, esto es $\left(6{,}25\times10^{-3}\right)\left(7{,}85\times10^{-2}\right) = 49{,}06\times10^{-5}\text{m}^2$.
Una fuerza de la magnitud $F$ se ejerce en el sacador, el esfuerzo de corte (fuerza por unidad de área) a través del borde es $S = \dfrac{F}{A} \Rightarrow$

$F = S.A = \left(3{,}45\times10^{8}\right)\left(49{,}06\times10^{-5}\right)$

= 1,69 x 10$^5$ N. La hoja de acero se corta por cizalladura cuando el esfuerzo llega a ser igual 3,45 x 10$^8$ N/m$^2$, es decir, cuando $F$ = 1,69 x 10$^5$ N.
Esta es la fuerza de 1,69 x 10$^5$ N, equivalente a 17,3 toneladas es requerida para perforar el agujero de 2,5 cm de diámetro El sacador y los dados son operados por una máquina conocida como prensa; en este caso uno tendría que utilizar una prensa con una capacidad de 20 toneladas o más.

**Ejemplo 43.** Calcular el módulo de rigidez del material en función a las características geométricas de un alambre (longitud $\ell$ y radio R) y del torque aplicado.

Manteniendo el extremo superior fijo aplicamos un torque $\tau$ que gira al extremo inferior un ángulo$\theta$.
Consideremos una capa diferencial cilíndrica de material concéntrica con el eje, de radio interior $r$ y de espesor $dr$, como se muestra en la figura.




La deformación es

$$\phi = \frac{\delta}{\ell} = \frac{r\theta}{\ell}$$

El esfuerzo cortante es

$$S_t = G\phi = \frac{Gr\theta}{\ell}$$

Como el esfuerzo cortante es la fuerza tangencial por unidad de área, multiplicándolo por el área de la sección transversal de la Capa, $2\pi\, rdr$, nos dará la fuerza tangencial $dF$ sobre la base de la Capa

$$dF = S_t dA = \left(\frac{Gr\theta}{\ell}\right)(2\pi rdr) = 2\pi G\frac{\theta}{\ell}r^2 dr$$

El torque sobre la base de la Capa cilíndrica es

$$d\tau = rdF = r\left(2\pi G\frac{\theta}{\ell}r^2 dr\right) = 2\pi G\frac{\theta}{\ell}r^3 dr$$

Integrando de 0 a R, el torque total sobre la base del cilindro es

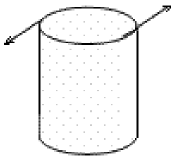
$$\tau = \frac{\pi}{2}G\frac{R^4}{\ell}\theta$$

De aquí

$$G = \frac{2\tau\ell}{\pi R^4\theta}$$

O sea, para determinar C bastará con medir el ángulo $\theta$ que se produce al aplicar el torque M.

**Ejemplo 44.** Una varilla de cobre de 40 cm de longitud y de 1 cm de diámetro está fija en su base y sometida a un par de 0,049 Nm en torno a su eje longitudinal. ¿Cuántos grados gira la cara superior respecto de la inferior?



**Solución.**

Cobre estirado en frío G = $48{,}0\times10^9$ N/m$^2$

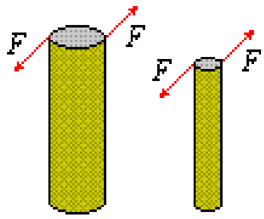
$$\tau = \frac{\pi}{2}G\frac{R^4}{\ell}\theta \quad \theta = \frac{2\ell\tau}{\pi G R^4}$$

$$\theta = \frac{2(0{,}4)(0{,}049)}{\pi(48{,}0\times10^9)(0{,}5\times10^{-2})} = 2{,}08\ \text{x}10^{-4}$$

radianes

**Ejemplo 45.** Una varilla que tiene 100 cm de longitud y 1 cm de diámetro está sujeta rígidamente por un extremo y se le somete a torsión por el otro hasta un ángulo de lº. Si se aplica la misma fuerza a la circunferencia de una varilla del mismo material pero que tiene una longitud de 80 cm y un diámetro de 2 cm, ¿cuál es el ángulo de torsión resultante?

**Solución.**




$$\tau = \frac{\pi}{2}G\frac{R^4}{\ell}\theta \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{32}G\frac{D^4}{\ell}\theta,$$

Como $\tau = FD \Rightarrow FD = \frac{\pi}{32}G\frac{D^4}{\ell}\theta$, de aquí

$$\theta = \left(\frac{32F}{\pi G}\right)\left(\frac{\ell}{D^3}\right)$$

Para la varilla de 100 cm y de 80 cm respectivamente son:

$$\theta_1 = \left(\frac{32F}{\pi G}\right)\left(\frac{\ell_1}{D_1^3}\right) \text{ Y } \theta_2 = \left(\frac{32F}{\pi G}\right)\left(\frac{\ell_2}{D_2^3}\right)$$

De estas últimas obtenemos:

$$\theta_2 = \left(\frac{\ell_2}{\ell_1}\right)\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3\theta_1 = \left(\frac{80}{100}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3 1^{\text{o}}$$

$= 0{,}1^{\text{o}}$

**DEFORMACION VOLUMETRICA. MODULO DE ELASTICIDAD VOLUMETRICO.**

**Módulo de elasticidad volumétrico.**

Consideramos ahora un volumen de material $V$ sujeto a un esfuerzo unitario $p_0$ (por ejemplo la presión atmosférica) sobre toda la superficie. Cuando el esfuerzo a presión se incrementa a $p = p_0 + \Delta p$ y el volumen sufre una disminución $\Delta V$, la deformación unitaria es $\delta = -\Delta V / V$

El esfuerzo es $\frac{F}{A} = \Delta p$.

La razón del esfuerzo de compresión uniforme a la deformación por compresión uniforme recibe es el módulo de elástico que en este caso se conoce como **módulo de compresibilidad volumétrica o volumétrico (*B*).**

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V}$$

Donde la constante de proporcionalidad B, depende solamente del material. El módulo volumétrico tiene las dimensiones de la presión, esto es, fuerza/área y es aplicable tanto para sólidos como líquidos. Pero, los gases tienen un comportamiento diferente que será considerado posteriormente.

| Nombre | Módulo volumétrico $B$ $10^{10}$ N/m$^2$ |
|---|---|
| Aluminio | 7,5 |
| Cobre | 14 |

| | |
|---|---|
| Hierro | 16 |
| Plomo | 17 |
| Níckel | 4,1 |
| Vidrio óptico | 5,0 |
| Latón | 6,0 |
| Acero | 16 |
| Agua | 0,21 |
| Mercurio | 2,8 |

**Ejemplo 46.** ¿Qué incremento de presión se requiere para disminuir el volumen de un metro cúbico de agua en un 0,005 por ciento?
**Solución.**
Por elasticidad volumétrica tenemos:

$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V}$$

El módulo de compresibilidad del agua es
2,1 x $10^9$ N/m $^2$

$$\Delta p = -2,1\times 10^9\left(\frac{-0,00005V}{V}\right)$$

= 1,05 x$10^5$ N/m $^2$

**Ejemplo 47.** Calcule densidad del agua del océano a una profundidad en que la presión es de 3430 N/cm$^2$. La densidad en la superficie es 1024 kg/m$^3$.
El módulo de compresibilidad del agua es 2,1 x $10^9$ N/m $^2$
**Solución.**
$p$ = 3430 N/cm$^2$ = 3,430 x$10^7$ N/m$^2$,
$\Delta p$ = 3,430 x$10^7$– 1,013 x$10^5$ $\approx$ 3,430 x$10^7$ N/m$^2$

En la superficie $\rho = \dfrac{m}{V} = 1024\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Cuando cambia el volumen a $V' = (V + \Delta V)$, tenemos:

$$\rho' = \frac{m}{V'} = \frac{m}{V+\Delta V} = \frac{m}{V\left(1+\dfrac{\Delta V}{V}\right)}$$

$$= \frac{\rho}{\left(1+\dfrac{\Delta V}{V}\right)}$$

Como $B = -\dfrac{\Delta p}{\dfrac{\Delta V}{V}} \Rightarrow \dfrac{\Delta V}{V} = -\dfrac{\Delta p}{B}$

De aquí:

$$\rho' = \frac{\rho}{\left(1+\dfrac{\Delta V}{V}\right)} = \frac{\rho}{\left(1-\dfrac{\Delta p}{B}\right)}$$

$$= \frac{1024}{\left(1-\dfrac{3,430\times 10^7}{2,1\times 10^9}\right)} = 1041 \text{ kg/m}^3$$

**Ejemplo 48.** Si con aluminio se fabrica un cubo de 10 cm de lado, se quiere saber las deformaciones que experimentará en una compresión uniforme, perpendicular a cada una de sus caras, de una tonelada, y cuándo esta misma fuerza actúa tangencialmente a la superficie de una de sus caras, estando el cubo só1idamente sujeto por la cara opuesta.
**Solución.**
La presión que soporta, cada cara, en el primer caso, será:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{(100)(9,8)}{0,1^2} = 9,8\times 10 \text{ Pa}$$

Como el módulo volumétrico del aluminio es
$B$ = 3,5x $10^{10}$ N/m$^2$:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{B} = -\frac{9,8\times 10^5}{3,5\times 10^{10}} = -2,8\times 10^{-5}$$

De donde:
$\Delta V$ = - 2,8x $10^{-5}$ $V$ = - 2,8x $10^{-5}$x $10^{-3}$ = - 2,8x $10^{-8}$ m$^3$.
En cuanto a la deformación, se obtiene a partir de la expresión de la deformación de cizalla, que es:

$$\tan\varphi \approx \varphi = \frac{1}{G}\frac{F}{A} = \frac{1}{3\times 10^{11} x 10^{-1}}\frac{(10^3)(9,8)}{10^{-2}}$$

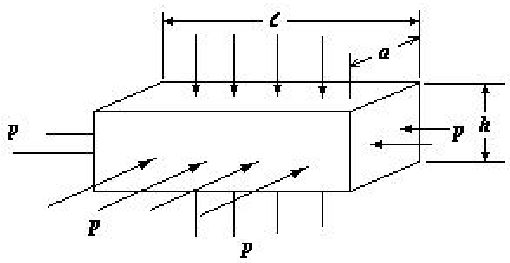
= 3,27x$10^{-5}$ rad

**RELACION ENTRE CONSTANTES ELASTICAS.**

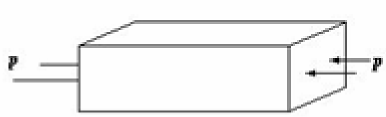
## Relación entre *B*, *Y* y $\sigma$

**Muestra sometida a una presión uniforme.**

La figura siguiente muestra un bloque bajo presión uniforme en toda su superficie exterior

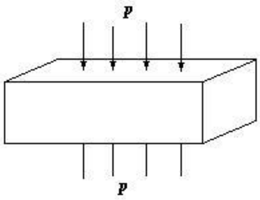



Como la presión es uniforme, el esfuerzo unitario en cada cara es el mismo.
Y las deformaciones de cada una de las dimensiones son:
Dimensión $\ell$:



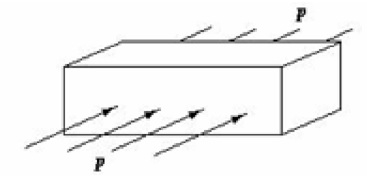

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = -\frac{p}{Y}$$

Dimensión *a*:



$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{p}{Y}$$

Dimensión *b*:



$$\frac{\Delta b}{b} = -\frac{p}{Y}$$

Pero, como la deformación de una dimensión lleva a la deformación de las otras dimensiones, tenemos.

**Deformación de $\ell$:**

- Propia:

$$\frac{\Delta \ell_1}{\ell} = -\frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de *a*:

$$\frac{\Delta \ell_2}{\ell} = -\sigma \frac{\Delta a}{a} = -\sigma\left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma \frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de *b*:

$$\frac{\Delta \ell_3}{\ell} = -\sigma \frac{\Delta b}{b} = -\sigma\left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma \frac{p}{Y}$$

Deformación total

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\Delta \ell_1}{\ell} + \frac{\Delta \ell_2}{\ell} + \frac{\Delta \ell_3}{\ell}$$

$$= -\frac{p}{Y}(1 - 2\sigma)$$

**Deformación de *a*:**

- Propia:

$$\frac{\Delta a_1}{a} = -\frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de $\ell$:

$$\frac{\Delta a_2}{a} = -\sigma \frac{\Delta \ell}{\ell} = -\sigma\left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma \frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de *b*:

$$\frac{\Delta a_3}{a} = -\sigma \frac{\Delta b}{b} = -\sigma\left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma \frac{p}{Y}$$

Deformación total

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta a_1}{a} + \frac{\Delta a_2}{a} + \frac{\Delta a_3}{a}$$

$$= -\frac{p}{Y}(1 - 2\sigma)$$

**Deformación de *b*:**

- Propia:

$$\frac{\Delta b_1}{b} = -\frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de *a*:

$$\frac{\Delta b_2}{b} = -\sigma \frac{\Delta a}{a} = -\sigma\left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma \frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de $\ell$:

$$\frac{\Delta b_3}{b} = -\sigma \frac{\Delta \ell}{\ell} = -\sigma\left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma \frac{p}{Y}$$

Deformación total

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta b_1}{b} + \frac{\Delta b_2}{b} + \frac{\Delta b_3}{b}$$

$$= -\frac{p}{Y}(1 - 2\sigma)$$

**El cambio de volumen es:**

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \ell}{\ell} + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

$$= -\frac{3p}{Y}(1 - 2\sigma)$$

Sabemos nosotros que el módulo de compresibilidad es

$$B = -\frac{p}{\Delta V / V}$$

Luego:

$$B = \frac{Y}{3(1 - 2\sigma)}$$

Expresión que nos relaciona el módulo de Compresibilidad, el módulo de Young y la relación de Poisson

**Ejemplo 49.** Se somete a una muestra de cobre de forma cúbica con 10 cm de arista a una compresión uniforme, aplicando Un esfuerzo de $10^6$ N/m$^2$ perpendicularmente a cada una de sus caras. La variación relativa de volumen que se observa es de $7{,}25\times10^{-6}$ .

a) Determinar el módulo de compresibilidad (*B*) del Cu en el sistema internacional.

b) Determinar el módulo de Poisson sabiendo que el módulo de Young del cobre es $120\times10^9$ Pa.

**Solución.**

a) Como:

$$\Delta p = 10^4 \text{ N/m}^2 ,\ \frac{\Delta V}{V} = -7{,}25\times10^{-6} \text{ y}$$

$$B = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}} \Rightarrow$$

$$B = -\frac{10^6}{-7{,}25\times10^{-6}} = 137{,}7 \text{ x } 10^9 \text{ N/m}^2$$

b)

$$B = \frac{Y}{3(1-2\sigma)} \Rightarrow (1-2\sigma) = \frac{Y}{3B}$$

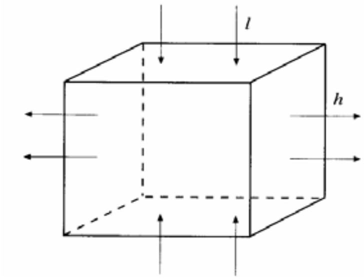
$$\Rightarrow \sigma = \frac{1-\dfrac{Y}{3B}}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{1-\dfrac{120\times10^9}{3(137{,}7\times10^9)}}{2} = 0{,}35$$

## Relación entre *G, Y* y $\sigma$

**Muestra sometida a esfuerzo cortante. Determinación de la relación entre el módulo de rigidez, el módulo de Young y el módulo de Poisson.**

Pretendemos analizar la relación entre los esfuerzos cortantes y los esfuerzos de compresión y de tracción. Para ello consideremos primero el caso del bloque de la Figura que está sometido, por una parte, a un esfuerzo de compresión y en la otra dirección a un esfuerzo de tracción. Sea 1 su longitud en la dirección horizontal y h su altura.



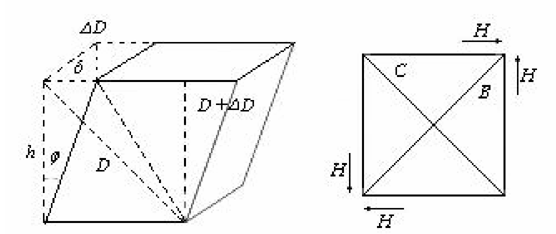

La deformación en la dirección horizontal tiene dos términos: el primero corresponde a la deformación producido por el esfuerzo de tracción, mientras que el segundo corresponde a la dilatación producida por la compresión en la dirección vertical. Por tanto, nos queda,

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{YA} + \sigma\frac{F}{YA} = (1+\sigma)\frac{F}{YA}$$

Por otra parte, la deformación en la dirección vertical corresponde a las deformaciones causadas por un lado por la fuerza de compresión en la dirección vertical y por otro por la tracción en la dirección horizontal. Por tanto,

$$\frac{\Delta h}{h} = -\frac{F}{YA} - \sigma\frac{F}{YA} = -(1+\sigma)\frac{F}{YA}$$

Ahora bien, en la Figura abajo representamos la deformación de un bloque sometido a un esfuerzo tangencial detallando lo que le ocurre a las diagonales de sus caras. Si observamos la figura, vemos que los resultados de los esfuerzos tangenciales equivalen a los producidos por las fuerzas *H* que producen, por una parte, un esfuerzo de tracción sobre el plano *C* y un esfuerzo de compresión sobre el plano *B*.




El esfuerzo de compresión sobre el plano *B* resulta ser

$$S_B = \frac{\sqrt{2}G}{\sqrt{2}A} = \frac{G}{A}$$

*A* e igualmente el esfuerzo de tracción sobre *C*

$$S_C = \frac{\sqrt{2}G}{\sqrt{2}A} = \frac{G}{A}$$

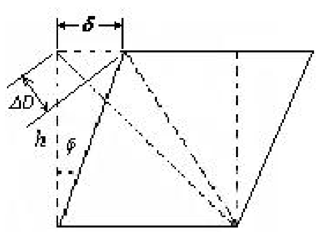
Las deformaciones de las diagonales *B* y *C* se escriben entonces

$$\frac{\Delta D_B}{D} = (1+\sigma)\frac{H}{YA}$$

y $\dfrac{\Delta D_C}{D} = (1+\sigma)\dfrac{H}{YA}$ (1)

Si expresamos el esfuerzo tangencial en términos del ángulo $\phi$, ya que suponemos que la deformación es pequeña resulta

$$\tan\phi \approx \phi \Rightarrow \phi = \frac{\delta}{h} \approx \frac{\sqrt{2}\Delta D_C}{h} = 2\frac{\Delta D_C}{D}$$




Donde las dos últimas igualdades surgen a partir de analizar la geometría esbozada en la Figura arriba. En efecto, si el ángulo entre $\delta$ y *ΔD* es de *45* grados se cumple

$$\frac{\delta}{\Delta D_C} = \frac{1}{\text{sen}45^o} = \sqrt{2}$$

Y por tanto

$$\phi = \frac{\delta}{h} = \frac{\sqrt{2}\Delta D_C}{D_C\text{sen}45^o} = \frac{2\Delta D_C}{D_C}$$

En estas condiciones, sí sustituimos en (1) este último resultado nos queda

$$\phi = 2(1+\sigma)\frac{H}{YA}$$

Esta ecuación, si tenemos en cuenta que $\phi$ es la deformación tangencial y la comparamos con la ecuación $G = \dfrac{S}{\phi} = \dfrac{H/A}{\phi}$, nos permite obtener

$$G = \frac{Y}{2(1+\sigma)}$$

Expresión que relaciona el módulo de rigidez con el módulo de Young y con el módulo de Poisson

**FUERZA ELASTICA Y ENERGIA ELASTICA.**
**Energía de deformación.**
La energía necesaria para estirar una cantidad x una muestra de material de constante de rigidez k es

Energía = $\int f dx = \int kx dx = \frac{1}{2}kx^2$ o en función de $F$

Energía $= \frac{1}{2}Fx$

Si la sección transversal de la muestra es A y su longitud $\ell$ entonces podemos escribir la ecuación como

$$\frac{\text{Energía}}{\text{A}\ell} = \frac{1}{2}\frac{Fx}{A\ell} \text{ o } \frac{\text{Energía}}{\text{A}\ell} = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{A}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)$$

Energía por unidad de volumen =
$\frac{1}{2}$(Esfuerzo)(Deformación unitaria)

Esta es la energía necesaria para estirar o comprimir la muestra, teniendo en cuenta el módulo de Young y la energía por unidad de volumen, puede expresarse como

$$\frac{\text{Energía}}{\text{Volumen}} = \frac{1}{2}\frac{(\text{Esfuerzo})^2}{Y}$$

**Ejemplo 50.** Una carga de 100 kg está colgada de un alambre de acero de 1 m de longitud y 1 mm de radio. ¿A qué es igual el trabajo de tracción del alambre?
**Solución.**
Por *la* ley de Hooke

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{F}{YA} \Rightarrow F = \frac{YA}{\ell}\Delta\ell \quad (1)$$

Pero para las fuerzas elásticas $F = k\Delta\ell$ (2)
Comparando (1) y (2) vemos que

$$k = \frac{AY}{\ell} \quad (3)$$

Entonces

$$W = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 = \frac{AY(\Delta\ell)^2}{2\ell} \quad (4)$$

Calculando la magnitud $\Delta\ell$ por la fórmula (1) y poniendo todos los datos numéricos en la ecuación (4) obtenemos definitivamente que $W$ = 0,706 J.

**Ejemplo 51.** Un alambre de acero de 2m de longitud cuelga de un soporte horizontal rígido.
a) ¿Cuánta energía almacena cuando se suspende en él una carga de 5 kg?
b) ¿Si la carga se aumenta 10 kg, en cuanto aumenta energía almacenada?
$Y$ = 2 x $10^{11}$ N/m$^2$, $A$ = área de la sección transversal = $10^{-6}$m$^2$
**Solución.**

$\ell = 2$ m, $F_1 = 5\times 9,8$ N, $F_2 = 10\times 9,8$ N
$A = 10^{-6}$ m$^2$, $Y = 2\times 10^2$ N/m$^2$

$W$ = trabajo realizado por la fuerza $F = kx$ en alargar el alambre una longitud $x$.

$$W = \frac{1}{2}kx^2, \text{ con } F = kx \Rightarrow x = \frac{F}{k}$$

$$W = \frac{1}{2}k\left(\frac{F}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$$

Para un alambre $k = \frac{YA}{\ell}$

Reemplazando:

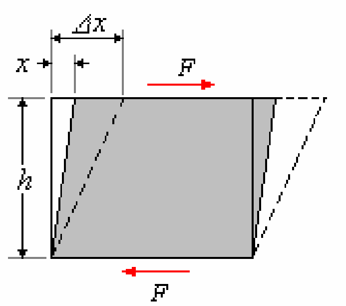
$$W = \frac{1}{2}\frac{F^2}{YA/\ell} = \frac{F^2\ell}{2AY}$$

a) $W_1 = \frac{F_1^2\ell}{2AY} = \frac{(5\times 9,8)^2(2)}{2(10^{-6})2\times 10^{11}}$ = 0,012 J

b) $W_2 = \frac{F_2^2\ell}{2AY} = \frac{(10\times 9,8)^2(2)}{2(10^{-6})2\times 10^{11}}$ = 0,048 J

El incremento en energía almacenada es:
$\Delta E = W_2 - W_1$ = 0,048 – 0,012 = 0,036 J.

**Ejemplo 52.** Demostrar que cuando se somete un cuerpo elástico a una tensión de corte pura que no supera el límite elástico de corte para el material, la densidad de energía elástica del cuerpo es igual a la mitad del producto de la tensión de corte por la deformación de corte.
**Solución.**




La fuerza que deforma por corte o cizalladura es $F = \frac{GA}{h}x$

El trabajo para deformar un $dx$ es

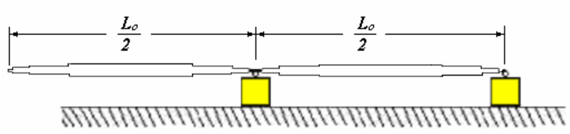
$$W = \int_{x=0}^{x=\Delta x}\frac{GA}{h}x dx$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{GA}{h}(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}F\Delta x$$

La densidad de energía es

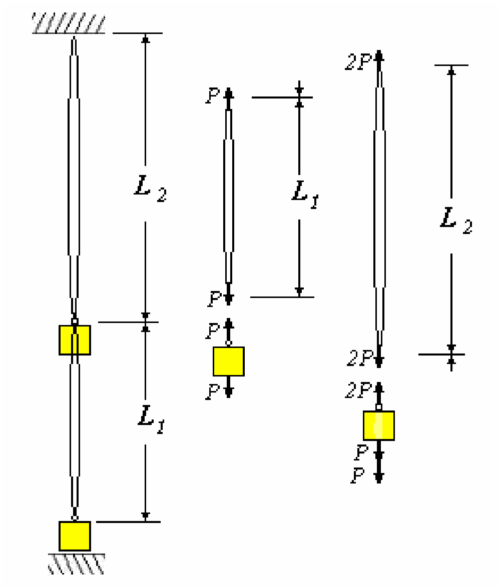
$$\frac{W}{A} = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{A}\right)\Delta x = \frac{1}{2}S_t\Delta x$$

**Ejemplo 53.** La elasticidad de una banda de goma de longitud $L_o$ es tal que una fuerza $F$ aplicada a cada extremo produce una deformación longitudinal de una unidad. Se sujetan dos pesos del mismo valor $P$, uno en un extremo y el otro en la mitad de la banda y a continuación se levanta la banda con los pesos por su extremo libre. ¿Cuál es la mínima cantidad de trabajo que hará elevar ambos pesos del suelo?




**Solución.**
Como cuando se aplicada a cada extremo una fuerza $F$ se produce una deformación longitudinal de una unidad:

$\Delta L = 1 = \dfrac{FL_0}{YA}$, luego $YA = FL_0$




Usando los diagramas del cuerpo libre mostrados en las figuras tenemos:
Para la parte de la liga $L_1$: tenemos:

$$\Delta L_1 = \frac{PL_0/2}{YA} = \frac{PL_0/2}{FL_0} = \frac{P}{2F}$$

Para la parte de la liga $L_2$, tenemos:

$$\Delta L_2 = \frac{2PL_0/2}{YA} = \frac{2PL_0/2}{FL_0} = \frac{P}{F}$$

La mínima cantidad de trabajo que hará elevar ambos pesos del suelo es:
Trabajo = Energía para estirar $\Delta L_1$ + Energía para estirar $\Delta L_2$ + Energía para elevar un peso $P$ la altura $L_1$, el peso inferior no se levanta, solamente se despega del piso.
Energía para estirar una banda elástica es

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

En este caso $k = \dfrac{YA}{L_0/2} = \dfrac{FL_0}{L_o/2} = 2F$, y $x = \Delta L_1$, o $\Delta L_2$, según corresponda

$$\text{Trabajo} = \frac{1}{2}2F(\Delta L_1)^2 + \frac{1}{2}2F(\Delta L_2)^2 + PL_1$$

Como conocemos $\Delta L_1$, $\Delta L_2$ y

$$L_1 = \frac{L_0}{2} + \Delta L_1 = \frac{L_0}{2} + \frac{P}{2F}$$

Tenemos

$$\text{Trabajo} = \frac{1}{2}2F\left(\frac{P}{2F}\right)^2 + \frac{1}{2}2F\left(\frac{P}{F}\right)^2 + P\left(\frac{L_0}{2} + \frac{P}{2F}\right)$$

Finalmente

$$\text{Trabajo} = \frac{7}{4}\frac{P^2}{F} + \frac{1}{2}PL_0$$

## PREGUNTAS Y PROBLEMAS

**1.** ¿Cuál es el objeto del refuerzo de acero en una viga de concreto?
¿El concreto necesita mayor refuerzo bajo compresión o bajo tensión? ¿Por qué?

**2.** ¿Cuál es más elástico, caucho o acero? ¿Aire o agua?

**3.** ¿Qué clase de elasticidad se presenta en un puente colgante? ¿En un eje de dirección automotriz? ¿En un resorte? ¿En tacos de caucho?

**4.** Una mujer distribuye su peso de 500 N igualmente sobre los tacones altos de sus zapatos. Cada tacón tiene 1,25 cm$^2$ de área. a) ¿Qué presión ejerce cada tacón sobre el suelo?

b) Con la misma presión, ¿cuánto peso podrían soportar 2 sandalias planas cada una con un área de 200 cm$^2$?

**5.** ¿Cuál debe ser el diámetro mínimo de un cable de acero que se quiere emplear en una grúa diseñada para levantar un peso máximo de 10000 kg.?El esfuerzo de ruptura por tracción del acero es de 30×10$^7$ Pa. Igual pero si se quiere un coeficiente de seguridad de 0,6.

**6.** Dos alambres del mismo material, y misma longitud $\ell$, cuyos diámetros guardan la relación $n$.
¿Qué diferencia de alargamientos tendrán bajo la misma carga?

**7.** Un ascensor es suspendido por un cable de acero. Si este cable es reemplazado por dos cables de acero cada uno con la misma longitud que el original pero con la mitad de su diámetro, compare el alargamiento de estos cables con el del cable original.

**8.** Una cierta fuerza se requiere para romper un alambre. ¿Que fuerza se requiere para romper un alambre del mismo material el cual es
a) del doble de longitud?
b) el doble en diámetro y dé la misma longitud?

**9.** Un hilo de 80 cm de largo y 0,3 cm de diámetro se estira 0,3 mm mediante una fuerza de 20 N. Si otro hilo del mismo material, temperatura e historia previa tiene una longitud de 180 cm y un diámetro de 0,25 cm. ¿qué fuerza se requerirá para alargarlo hasta una longitud de 180,1 cm?
**Respuesta.**
$F$ = 211 N

**10.** a) Calcule el cambio de dimensiones de una columna de fundición gris ($Y$ = 145 GPa) que tiene dos tramos de 1,5 m cada uno y diámetros de 0,1 m y 0,15 m, al soportar una carga de 500 kN. ¿Está bien dimensionada la columna si el límite elástico de la fundición gris es 260 MPa?
b) Si la columna fuera troncocónica de 3 m de altura, y los diámetros de sus bases variaran entre 0,1 m y 0,15 m.
**Respuesta.** a) $L_f$ = 3,001 m. Sí está bien dimensionada.
b) $L_f$ = 3,0009 m

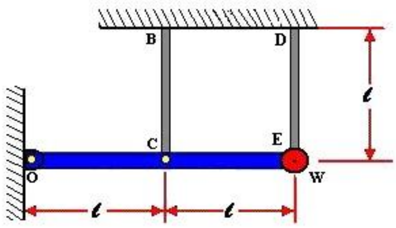
**11.** Un cable de acero de 2 m de largo tiene una sección transversal de 0,3 cm$^2$. Se cuelga un torno de 550 kg del cable. Determínese el esfuerzo, la deformación y el alargamiento del cable. Supóngase que el cable se comporta como una varilla con la misma área transversal. El módulo de Young del acero es 200×10$^9$ Pa.

**12.** Una varilla metálica de 4 m de largo y sección 0,5 cm$^2$ se estira 0,20 cm al someterse a una tensión de 5000 N. ¿Qué módulo de Young tiene el metal?

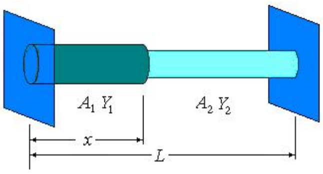
**13.** Una cuerda de Nylon se alarga 1,2 m sometida al peso de 80 kg de un andinista.
Si la cuerda tiene 50 m de largo y 7 mm de diámetro, ¿qué módulo de Young tiene el Nylon?

**14.** Para construir un móvil, un artista cuelga una esfera de aluminio de 5 kg de una alambre vertical de acero de 0,4 m de largo y sección 3×10$^{-3}$ cm$^2$. En la parte inferior de la esfera sujeta un alambre similar del cual cuelga un cubo de latón de 10 kg. Para cada alambre calcular la deformación por tensión y el alargamiento.

**15.** En el sistema mostrado en la figura, la barra OE es indeformable y, de peso $P$; los tensores AC y DE son de peso despreciable, área $A$ y módulo de elasticidad $Y$.
Determinar cuánto bajará el peso $W$ respecto a la posición en la cual los tensores no estaban deformados.

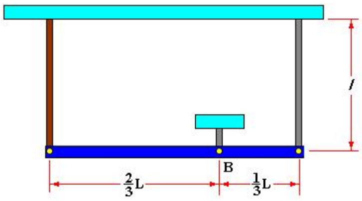



**16.** Dos barras de longitud $(\frac{\ell}{2}+\Delta\ell)$ cada una, áreas $A_1$ y $A_2$ y módulos de elasticidad $Y_1$ e $Y_2$ respectivamente, como se muestra en la figura, se comprimen hasta introducirlas entre dos paredes rígidas separadas una distancia $\ell$. ¿Cuál será la posición x de la unión de ambas barras?

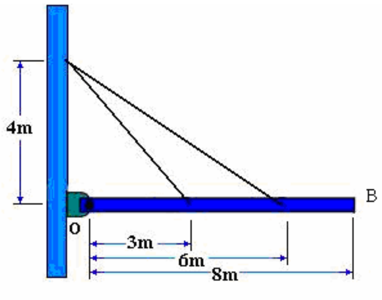



**17.** Una varilla de 1,05 m de largo y peso despreciable está sostenida en sus extremos por alambres A y B de igual longitud. El área transversal de A es de 1 mm$^2$ y la de B 4 mm$^2$. El módulo de Young de A es 2,4×10$^{11}$Pa y de B 1,2×10$^{11}$ Pa. ¿En que punto de la varilla debe colgarse un peso P a fin de producir
a) esfuerzos iguales en A y B? y b) ¿deformaciones iguales en A y B?

**18.** Una barra de longitud $L$ y masa m se encuentra suspendida por un pivote B indeformable y por dos barras en sus extremos como se muestra en la figura estas barras son iguales de área *A*, longitud $\ell$ y módulo de elasticidad *Y*.

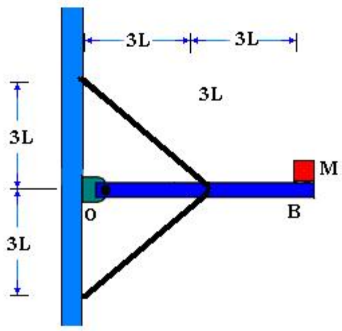



**19.** En el sistema mostrado en la figura, calcular cuánto desciende el extremo B de la barra indeformable y de peso despreciable, cuando se le coloca un peso de 10 Ton. en ese extremo.
Los tirantes son de acero y de 2cm$^2$ de área cada uno, suponga deformaciones pequeñas de tal manera que se puedan hacer las aproximaciones geométricas apropiadas.




**Respuesta.** $\Delta y$ = 17,1 x 10$^{-3}$ m

**20.** En el sistema mostrado en la figura, calcular cuanto desciende el extremo B de la barra horizontal rígida y de peso despreciable, cuando se le coloca una masa *M* en ese extremo.
Las barras inclinadas son iguales de área *A* y módulo de elasticidad *Y*.
Asuma pequeñas deformaciones, o sea, que se pueden hacer las aproximaciones geométricas usuales.




**21.** Un hilo delgado de longitud $\ell$, módulo de Young *Y* y área de la sección recta *A* tiene unido a su extremo una masa pesada m. Si la masa está girando en una circunferencia horizontal de radio *R* con velocidad angular $\omega$, ¿cuál es la deformación del hilo? (Suponer que es despreciable la masa del hilo).
**Respuesta.**

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{m\omega^2 R}{AY}$$

**22.** Un alambre de cobre de 31 cm de largo y 0,5 mm de diámetro está unido a un alambre de latón estirado de 108 cm de largo y 1 mm de diámetro. Si una determinada fuerza deformadora produce un alargamiento de 0,5 mm al conjunto total y un valor de Y = 12 x 10$^{10}$ Pa, ¿cuál es el alargamiento de cada parte?
**Respuesta.**
$\Delta\ell$ = 0,27 mm para el latón.
$\Delta\ell$ = 0,23 mm para el cobre

**23.** Un alambre de acero dulce de 4 m de largo y 1 mm de diámetro se pasa sobre una polea ligera, uniendo a sus extremos unos pesos de 30 y 40 kg. Los pesos se encuentran sujetos, de modo que el conjunto se encuentra en equilibrio estático. Cuando se dejan en libertad, ¿en cuánto cambiará la longitud del alambre?
**Respuesta.**
$\Delta\ell$ = 1,0 mm

**24.** Un hilo está formado por un núcleo de acero dulce de 1,3 cm de diámetro, al cual se le ha fusionado una capa exterior de cobre (*Y* = 12 x 10$^{10}$ Pa) de 0,26 cm de gruesa. En cada extremo del hilo compuesto se aplica una fuerza de tracción de 9000 N. Si la deformación resultante es la misma en el acero y en el cobre, ¿cuál es la fuerza que soporta el núcleo de acero?
**Respuesta.**
*F* = 5812 N

**25.** Un ascensor cargado con una masa total de 2000 kg esta de un cable de 3,5 cm$^2$ de sección. El material del cable tiene un límite elástico de 2,5 x 10$^8$ Pa y para este material Y = 2 x 10$^{10}$ Pa. Se especifica que la tensión del cable nunca excederá 0,3 del límite elástico.
a) Hallar la tensión del cable cuando el ascensor está en reposo.
b) ¿Cuál es la mayor aceleración permisible hacia arriba?
c) ¿La distancia más corta de parada permisible cuando la velocidad del ascensor es hacia abajo?
**Respuesta.**
a) $\frac{F}{A}$ = 5,6 x 10$^7$ Pa, b) $a$ = 0,33 m/s$^2$,
c) $\Delta y$ = 33,8 m.

**26.** Volver a resolver el Problema anterior, teniendo en cuenta esta el peso del cable cuando tiene su longitud máxima de 150 m. La densidad del material del cable es 7,8 x 10$^3$ kg /m$^3$. Si se supera la carga máxima, ¿por dónde se romperá el cable: cerca de su punto más alto o próximo al ascensor?
**Respuesta.**
a) $\frac{F}{A}$ = 6,75 x 10$^7$ Pa, b) $a$ = 1,32 m/s$^2$,

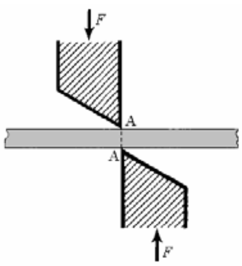
c) $\Delta y$ = 85,3 m.

**27.** Un cable pesado de longitud inicial y área de sección recta $A$ tiene una densidad uniforme $\rho$ y un módulo de Young $Y$. El cable cuelga verticalmente y sostiene a una carga $F_g$ en su extremo inferior. La fuerza tensora en un punto cualquiera del cable es evidentemente suma de la carga $F_g$ y del peso de la parte del cable que está debajo de dicho punto. Suponiendo que la fuerza tensora media del cable actúa sobre la longitud total del cable $\ell_0$, hallar el alargamiento resultante.
**Respuesta.**

$$\Delta\ell = \left(\frac{\ell_0}{Y}\right)\left(\frac{F_g}{A} + \frac{1}{2}\rho g \ell_0\right)$$

**28.** Demostrar que cuando se somete un cuerpo elástico a una tensión de corte pura que no supera el límite elástico de corte para el material, la densidad de energía elástica del cuerpo es igual a la mitad del producto de la tensión de corte por la deformación de corte.

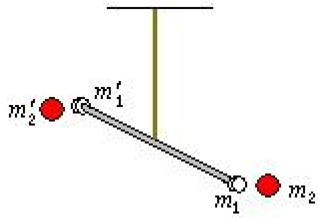
**29**. El esfuerzo de la ruptura del cobre rolado para la cizalladura es típicamente 1,5 x $10^8$.
¿Qué fuerzas $F$ se deben aplicar a las cuchillas de metal mostradas en la figura para cortar una tira de una hoja de cobre de 5 cm de ancho y 1,27 mm de espesor?




**Respuesta.** 9525 N

**30.** Una varilla que tiene 100 cm de longitud y 1 cm de diámetro está sujeta rígidamente por un extremo y se le somete a torsión por el otro hasta un ángulo de lº. Si se aplica la misma fuerza a la circunferencia de una varilla del mismo material pero que tiene una longitud de 80 cm y un diámetro de 2 cm, ¿cuál es el ángulo de torsión resultante?
**Respuesta.** $\theta = 0{,}1^{\circ}$

**31.** La balanza de torsión de la figura se compone de una barra de 40 cm con bolas de plomo de 2 cm en cada extremo. La barra está colgada por un hilo de plata de 100 cm que tiene un diámetro de 0,5 mm. Cuando se ponen muy de cerca de las bolas de plomo, pero en lados opuestos, dos bolas mayores de plomo de 30 cm de diámetro ($\rho$ = 11,4 g/cm$^3$), sus atracciones gravitatorias tienden a hacer girar la barra en el mismo sentido. ¿Cuál será la torsión del hilo de plata?




**Respuesta.** $\theta$ = 0,00422º

**32.** a) Desarrollar una expresión para la constante de torsión de un cilindro hueco en función de su diámetro interno $R_o$, su radio externo $R_1$, su longitud $\ell$ y su módulo de corte $G$.
b) ¿Cuál deberá ser el radio de un cilindro macizo de la misma longitud y material y que posee la misma constante de torsión?
c) ¿Cuál deberá ser el ahorro de masa si se utilizase el cilindro hueco en un eje de una máquina en lugar de utilizar el cilindro macizo?
**Respuesta.**

a) $\tau_0 = \left(\frac{\pi G}{2\ell}\right)\left(R_1^4 - R_0^4\right)$, b) $R = \left(R_1^4 - R_0^4\right)^{\frac{1}{4}}$

c) Ahorro $= 100\left[1 - \sqrt{\frac{\left(R_1^2 - R_0^2\right)}{\left(R_1^2 + R_0^2\right)}}\right]\%$

**33.** $A$ profundidades oceánicas de unos 10 km la presión se eleva a 1 kilobar, aproximadamente.
a) Si se hunde un trozo de acero dulce hasta esta profundidad, ¿en cuánto variará su densidad?
b) ¿Cuál es la densidad del agua del mar a esta profundidad si la densidad en la superficie vale 1,04 g/cm$^3$?
$B_{\text{acero}}$ = 16 x $10^{10}$ N/m$^2$ , $B_{\text{agua}}$ = 0,21 x $10^{10}$ N/m$^2$, 1bar = $10^5$ Pa
**Respuesta.**
a) 0,062 %, b) $\rho$ = 1,105 g/cm$^3$

**34.** Se somete a una muestra de cobre de forma cúbica con 10 cm de arista a una compresión uniforme, aplicando una tensión equivalente a una tonelada perpendicularmente a cada una de sus caras. La variación relativa de volumen que se observa es de 7,25×10$^{-6}$ ($\Delta V/Vo$). Determinar el módulo de compresibilidad del Cu en el sistema internacional, sabiendo que el módulo de Young del cobre es 120×109 Pa. Obtener además el módulo de Poisson.

**35.** Un depósito de acero de 60 litros de capacidad contiene oxígeno a una presión manométrica de 140 Pa. ¿Qué volumen ocupará el oxígeno si se le permite que se expansione a temperatura constante hasta que su presión manométrica es nula? (La presión manométrica es la diferencia entre la presión real en el interior del depósito y la de la atmósfera exterior).
**Respuesta.** $V$ = 889 litros.

**36.** En cada extremo de una barra horizontal de 1,5 m de larga, 1,6 cm de ancha y 1 cm de larga se aplica una fuerza de tracción de 2 800 N. El módulo de Young y el coeficiente de Poisson del material de la barra son $Y = 2 \times 10^6$ Pa y $\sigma = 0,3$.
a) Hallar la deformación transversal barra.
b) ¿Cuáles son las variaciones relativas de la anchura y altura?
c) ¿Cuál es el aumento de volumen?
d) ¿Cuál es la energía potencial adquirida por la barra?
**Respuesta.**
a) $\dfrac{\Delta d}{d_0} == -2,625 \times 10^{-4}$,
b) $\Delta d = -4,2 \times 10^{-4}\, cm$
c) $\Delta h = -2,625 \times 10^{-4}\, cm$

**37.** a) Demostrar que el coeficiente de Poisson viene dado por

$$\sigma = \frac{3B. - 2S}{2(3B + S)}$$

b) Demostrar que a partir de esta ecuación se sigue que el coeficiente de Poisson debe estar comprendido entre -1 y $\dfrac{1}{2}$.
c) La experiencia demuestra que las barras sometidas a fuerzas de tracción (valores positivos siempre aumentan de volumen, mientras que si se someten a fuerzas de compresión (valores negativos de F), siempre disminuyen de volumen ¿Apoya esta afirmación el hecho de que no existe ningún material para el cual $\sigma \geq \dfrac{1}{2}$ ?

**38.** Un manual de materiales relaciona estos datos para el aluminio en hoja laminada
Módulo de Young, $7 \times 10^{10}$ Pa
Límite elástico a la tracción, $7,2 \times 10^7$ Pa
Coeficiente de Poisson, 0,33
Tensión de tracción final, $14 \times 10^7$ Pa
Tensión de tracción permisible, 0,4 de la tensión de tracción final
La tensión de tracción permisible es la máxima tensión que se considera segura cuando este material se utiliza en estructuras sometidas a de tracción conocidas y constantes. Una tira de este aluminio de 76 cm de larga, 2,5 cm de ancha y 0,8 mm de gruesa se estira gradualmente hasta que la tensión de tracción alcanza su límite permisible. Calcular
a) su variación de longitud,
b) su variación de volumen,
c) el trabajo realizado y
d) la ganancia en la densidad de energía elástica.
**Respuesta.**
a) $\Delta \ell$ = 0,688 mm, b) $\Delta V$ = 0,0041 cm$^3$,
c) $W$ = 0,341 J, d) $\Delta U$ = 22400 J/m$^3$