CICLO : 2016 - 0

CURSO : FÍSICA

PROFESOR : R. Zavala Sánchez – J. Tiravantti Constantino

SEMANA : 03 - 04

ESTATICA I y II

INTRODUCCION

La estática es la parte de la mecánica que se concreta al estudio del equilibrio de los cuerpos; considerados como partículas y luego, como cuerpos rígidos. Es indispensable dentro de este campo el concepto de torque o momento de una fuerza para el estudio del equilibrio rotacional de los cuerpos rígidos El torque esta relacionado con la efectividad de las fuerzas para producir rotaciones, Se le da la importancia debida a los métodos de determinación del centro de fuerzas paralelas y centro de gravedad así como el tratamiento de los vectores en el espacio

4.1 COMPOSICIÓN DE FUERZAS

CONCURRENTES

La resultante de un sistema de fuerzas concurrentes (vectores concurrentes) es una única fuerza que pasa por el punto de concurrencia de las líneas de acción de las fuerzas que componen el sistema. Dicha resultante se obtiene aplicando las reglas del cálculo vectorial estudiadas en el capítulo I, en especial el método de la descomposición de vectores en componentes rectangulares (sec 1.3)

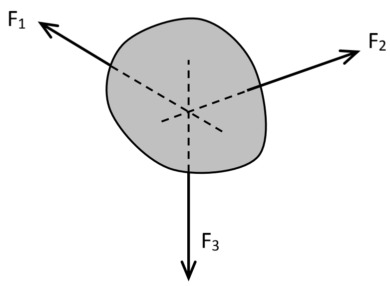

Figura 4.1 Tres fuerzas concurrentes

La expresión general de la resultante de n fuerzas concurrentes está dada por

$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots\ldots + \mathbf{F}_n$ (4.1)

EJEMPLO 4.1 Dadas las tres fuerzas en el espacio: $\mathbf{F}_1 = 3\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$; $\mathbf{F}_2 = -2\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}$; $\mathbf{F}_3 = -2\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}$, concurrentes en el origen de coordenadas. a) Expresar los vectores fuerza dados en forma de ternas ordenadas b) Hallar la fuerza resultante en módulo y dirección

Solución a) Fuerzas en forma de ternas

$\mathbf{F}_1 = (3, -4, 5)$

$\mathbf{F}_2 = (0, -2, -3)$

$\mathbf{F}_3 = (-2, +5, 0)$

b) El vector resultante se obtiene sumando componentes homólogos de las ternas

$F_x = 3 + 0 - 2 = 1$

$F_y = -4 - 2 + 5 = -1$

$F_z = 5 - 3 + 0 = 2$

Resultante: $\mathbf{F} = (1, -1, 2)$

Módulo $F = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = 2{,}45$ N

Dirección (cosenos y ángulos directores)

$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{1}{2{,}45} = 0{,}408; \quad \alpha = 66°$

$\cos\beta = \frac{F_y}{F} = \frac{-1}{2{,}45} = -0{,}408; \quad \beta = 114°$

$\cos\gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{2}{2{,}45} = 0{,}816; \quad \gamma = 35{,}3°$

EJEMPLO 4.2 Hallar el módulo y la dirección de la resultante de las tres fuerzas que actúan sobre el paralelepípedo de la figura sabiendo que los módulos de dichas fuerzas son: $F_1 = \sqrt{14}$ N $F_2 = 2$ N, $F_3 = \sqrt{5}$ N; y A(1,2,3) punto medio de la cara superior.

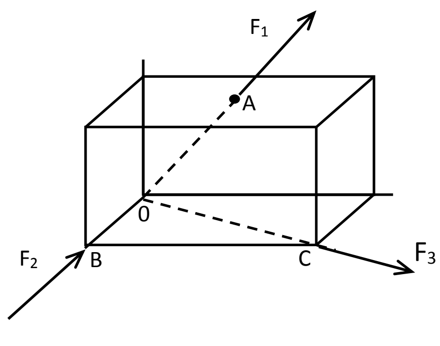

Figura 4.2 Fuerzas concurrentes en el espacio

Solución: Las direcciones de las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ están dadas por los vectores unitarios de los vectores de posición de los puntos A(1,2,3), B(2,0,0) y C(2.4,0) respectivamente.

$\mathbf{r}_1 = \vec{OA}$, $\mathbf{r}_2 = \vec{OB}$, $\mathbf{r}_3 = \vec{OC}$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{r}_1}{r_1} = \frac{\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{r}_2}{r_2} = \frac{\mathbf{i}+0\mathbf{j}+0\mathbf{k}}{1} = (1, 0, 0)$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{r}_3}{r_3} = \frac{2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+0\mathbf{k}}{\sqrt{4+16}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$$

Expresando a los vectores fuerza en forma de ternas ordenadas para facilitar su suma, obtenemos:

$\mathbf{F}_1 = F_1\mathbf{u}_1 = \sqrt{14}\,\mathbf{u}_1 = \mathbf{i}+2\,\mathbf{j}+3\,\mathbf{k} = (1, 2, 3)$

$\mathbf{F}_2 = -F_2\mathbf{u}_2 = -2\,\mathbf{u}_2 = -2\,\mathbf{i} = (-2, 0,0)$

$\mathbf{F}_3 = F_3\,\mathbf{u}_3 = \sqrt{5}\,\mathbf{u}_3 = \mathbf{i}+2\,\mathbf{j}+0\,\mathbf{k} = (1, 2, 0)$

Resultante de componentes en X: F_x

$F_x = \sum F_{nx} = F_{1X} + F_{2X} + F_{3X}$

$F_x = 1 - 2 + 1 = 0$

Resultante de componentes en Y: F_y

$F_y = \sum F_{nY} = F_{1Y} + F_{2Y} + F_{3Y}$

$F_y = 2 + 0 + 2 = 4$

Resultante de componentes en Z: F_z

$F_z = \sum F_{nZ} = F_{1Z} + F_{2Z} + F_{3Z}$

$F_z = 3 + 0 + 0 = 3$

Fuerza resultante: $\mathbf{F} = F_X\,\mathbf{i} + F_Y\,\mathbf{j} + F_Z\,\mathbf{k}$

Reemplazando los valores de las componentes se tiene:

$\mathbf{F} = 4\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ N; $F = \sqrt{16+9} = 5$ N

(N, unidad de fuerza: newton)

Cosenos y ángulos directores del vector fuerza **F**:

$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = 0$; $\alpha = 90°$

$\cos\beta = \frac{F_y}{F} = \frac{4}{5}$, $\beta = 37°$

$\cos\gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{3}{5}$, $\gamma = 53°$

La fuerza resultante se encuentra en el plano YZ, a 37° del eje Y y a 53° del eje Z

4.2 MOMENTO O TORQUE DE UNA FUERZA

La experiencia diaria nos muestra que la capacidad de la fuerza para producir rotación no sólo depende de dicha fuerza sino también de la ubicación de su punto de aplicación con respecto al eje de rotación. Se denomina ***torque o momento de una fuerza a la medida de la efectividad para producir rotación***. Como la rotación tiene un sentido, el momento es una cantidad vectorial. En la fig 4.3, si el punto O se mantiene fijo y F actúa en el punto P, la experiencia nos dice que el cuerpo tenderá a rotar en sentido horario alrededor de un eje perpendicular al plano del papel que pasa por O.

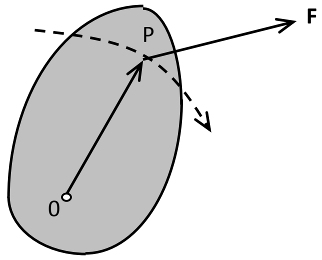

Figura 4.3 El cuerpo rota en torno al punto O

Torque de una fuerza respecto a un punto

Una fuerza F y un punto O en el espacio determinan siempre un plano que contiene a la fuerza y al punto. El torque de la fuerza F con respecto al punto O es el vector $\boldsymbol{\tau}$ definido por:

$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ (4.2)

En la figura 4.4, O es el origen del vector torque y por allí pasa el eje de rotación; **r** es el vector de posición del punto de aplicación de **F**.

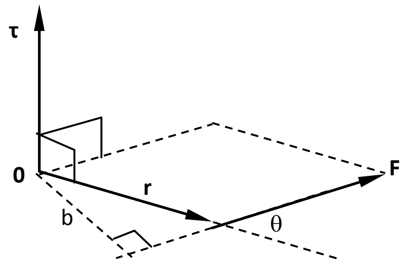

Figura 4.4 El torque es un vector

Según la regla del producto vectorial, el vector torque es perpendicular al plano determinado por **F** y **r**, y apunta en la dirección del avance del tornillo de rosca a derechas, cuando el ángulo de rotación del tornillo se mide de **r** a **F**. El módulo de $\boldsymbol{\tau}$ es:

$\tau = r\,F\,\text{sen}\theta$ (4.3)

Donde $b = r.\text{sen}\theta$ recibe el nombre de brazo de momento y es la distancia perpendicular del punto O a la línea de acción de la fuerza:

$\tau = F\,b$ (4.4)

Unidades de torque:

SI : Newton-metro ....(Nm)

cgs : Dina.cm ……………(din.cm)

Británico : Libra-pié.............. (lbf.pie)

La ecuación (4.2), también se puede desarrollar del siguiente modo:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} = (yF_z - zF_y)\mathbf{i} + (zF_x - xF_z)\mathbf{j} + (xF_y - yF_x)\mathbf{k} \qquad (4.5)$$

Torque de una fuerza con respecto a un eje

Consideremos en el espacio una fuerza **F**, un punto O y un eje arbitrario L que pasa por O. En la sección anterior se definió el torque de **F** respecto a un punto O mediante la siguiente expresión: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ El torque de **F** respecto al eje L que designaremos con τ_L es el vector proyección de τ en la dirección de L. ver figura 4.5

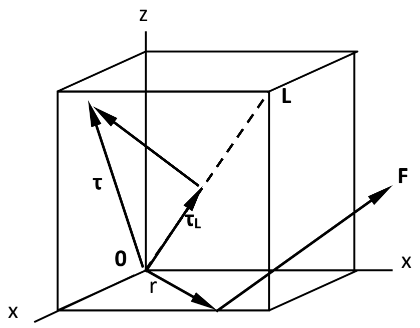

Figura 4.5 proyección del torque

$\tau_L = \text{Proyec}_{\mathbf{e}}\, \tau$

$\tau_L = (\boldsymbol{\tau}.\mathbf{e})\mathbf{e} \qquad (4.6)$

donde **e** es un vector unitario en la dirección del eje L.

Eligiendo a O como el origen de coordenadas, la expresión vectorial del torque de la fuerza F con respecto a O tiene la forma siguiente

$\tau = \tau_x\,\mathbf{i} + \tau_y\mathbf{j} + \tau_z\mathbf{k} \qquad (4.7)$

Si tomamos como eje de rotación al eje X, el vector unitario en esta dirección es $\mathbf{e} = \mathbf{i}$ de modo que el momento de la fuerza **F** con respecto al eje X de acuerdo con la ecuación (4.5) es:

$\boldsymbol{\tau_x} = \tau_x\mathbf{i}$

En consecuencia de acuerdo con la ecuación (4.6), el momento de una fuerza respecto a un punto es igual a la suma de los momentos respecto a tres ejes ortogonales que pasan por el punto:

$\tau = (\tau\,.\,\mathbf{i}\,)\mathbf{i} + (\tau\,.\,\mathbf{j}\,)\mathbf{j} + (\tau\,.\,\mathbf{k})\mathbf{k}$

4.3 TEOREMA DE VARIGNON

Sean $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ .... fuerzas concurrentes que tienen como punto de aplicación común el punto P y sea su resultante:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \ldots$$

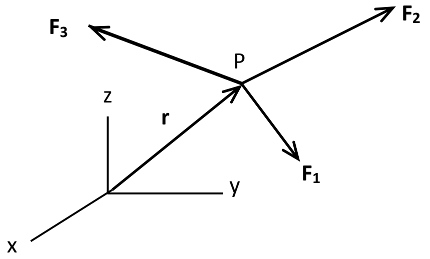

Figura 4.6 Torque resultante

Todas las fuerzas incluyendo su resultante, tienen el mismo vector de posición r. Sea τ el torque de la resultante, Luego

$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$

$\tau = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots)$

$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_3 + \ldots$

$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots$

Según este resultado tenemos el teorema de Varignon cuyo enunciado es:

"Con respecto al mismo punto, el torque de la fuerza resultante es igual a la suma de los torques de las fuerzas componentes".

EJEMPLO 4.3 Dadas las fuerzas concurrentes:

$\mathbf{F}_1 = 14\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}$

$\mathbf{F}_2 = -6\,\mathbf{i}$

$\mathbf{F}_3 = -4\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - 8\,\mathbf{k}$

aplicadas en el punto (5, – 4, 6). Si las fuerzas y distancias se miden en el sistema **SI**. Hallar a) la fuerza resultante b) el torque con respecto al origen de cada una de las fuerzas dadas y verificar. c) que el torque de la fuerza resultante es igual a la suma de los torques de las fuerzas componentes. d) Demostrar que el torque resultante es perpendicular a la fuerza resultante

Solución: a) Escribiendo los vectores en forma de ternas ordenadas y sumando verticalmente hallamos: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$

$\mathbf{F}_1 = (14, -2, 0)$

$\mathbf{F}_2 = (-6, 0, 0)$

$\mathbf{F}_3 = (-4, 1, -8)$

$\mathbf{F} = (4, -1, -8)$

Cuyo módulo es: $F = \sqrt{16+1+64} = 9$ Newton

y $\mathbf{u_F}$ el vector unitario en la dirección de **F**:

$$\mathbf{u_F} = \frac{\mathbf{F}}{F} = \frac{(4,-1,-8)}{9} = (4/9, -1/9, -8/9)$$

Cosenos directores de la fuerza resultante:

$\cos\alpha = \ 4/9, \quad \alpha = 63{,}6°$

$\cos \beta = -1/9, \quad \beta = 96{,}4°$

$\cos\gamma = -8/9; \ \gamma = 153°$

b) Torques:

El vector de posición del punto de aplicación común es: $\mathbf{r} = 5\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k}$ metros. Luego

los torques individuales y su resultante por el método de determinantes son:

$$\tau_1 = \mathbf{r}\times\mathbf{F}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -4 & 6 \\ 14 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 12\mathbf{i} + 84\mathbf{j} + 46\mathbf{k}$$

$$\tau_2 = \mathbf{r}\times\mathbf{F}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -4 & 6 \\ -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -36\,\mathbf{j} - 24\,\mathbf{k}$$

$$\tau_3 = \mathbf{r}\times\mathbf{F}_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -4 & 6 \\ -4 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 26\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$$

$\tau_1 = 12\,\mathbf{i} + 84\,\mathbf{j} + 46\,\mathbf{k} = (12, 84, 46)$

$\tau_2 = -36\,\mathbf{j} - 24\,\mathbf{k} = (0, -36, -24)$

$\tau_3 = 26\,\mathbf{i} + 16\,\mathbf{j} - 11\,\mathbf{k} = (26, 16, -11)$

Suma……$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = (38, 64, 11)$; (I)

c) Torque de la resultante:

$$\tau = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -4 & 6 \\ 4 & -1 & -8 \end{vmatrix}$$

$\tau = \mathbf{i}\,(32+6) + \mathbf{j}\,(24+40) + \mathbf{k}\,(-5+16)$

$\tau = 38\,\mathbf{i} + 64\,\mathbf{j} + 11\,\mathbf{k} = (38, 64, 11)$ ……(II)

Note que la suma de torques de las fuerzas componentes señalados en (I) es igual al torque de la fuerza resultante indicado en (II): Esto verifica el teorema de Varignon

d) Con la condición de perpendicularidad tenemos:

$\mathbf{F}.\,\tau = (4\,\mathbf{i} - \mathbf{j} - 8\,\mathbf{k}).\,(38\,\mathbf{i} + 64\,\mathbf{j} + 11\,\mathbf{k})$

$\mathbf{F}.\,\tau = 152 - 64 - 88 = 0$

Entonces **F** y τ son perpendiculares

4.4 PAR DE FUERZAS O CUPLA

Son dos fuerzas paralelas de igual módulo pero de sentidos opuestos con líneas de acción no coincidentes figura 4.7

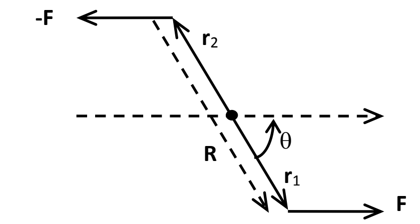

Figura 4.7 Cupla o par motor

La resultante del par es obviamente cero: **F** – **F** = 0; esto significa que el par aplicado sobre un cuerpo no produce efecto de traslación, sino más bien rotación figura 4.8

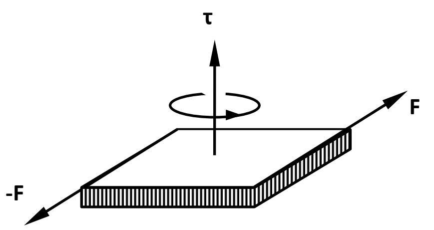

Figura 4.8 La cupla produce rotación

El Torque del par llamado también momento de la cupla es:

$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \mathbf{r}_1\times\mathbf{F} + \mathbf{r}_2\times(-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\times\mathbf{F}$

pero $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}$; por tanto:

$\tau = \mathbf{R}\times\mathbf{F}$ (4.8)

El torque es un vector perpendicular al plano que contiene a las fuerzas (figura 4.8). Su módulo es:

$\tau = R\,F\,\text{sen}\theta$

$\tau = Fb$ (4.9)

Donde θ es el ángulo entre **R** y **F** y $R.\text{sen}\theta = b$ recibe el nombre de brazo de momento del par y es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de las fuerzas. **F** y **– F.** La cupla produce siempre un efecto rotatorio y puede ser positiva o negativa, según que su rotación sea antihoraria u horaria.

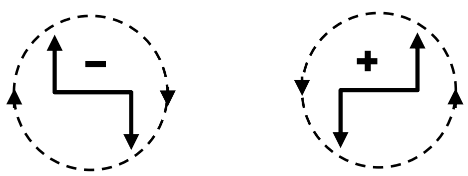

Figura 4.9 Cuplas negativa y positiva

Son características de una cupla:

1 Se puede trasladar y girar dentro de su plano
2. Se puede trasladar a otro plano paralelo

3. Puede variar sus componentes (fuerzas y brazo) siempre y cuando no varíe su módulo.

4. Puede sumar su acción a otra cupla,

4.5 FUERZAS COPLANARES

Si las fuerzas coplanares **F**$_1$, **F**$_2$, **F**$_3$ se encuentran en el plano XY su resultante **F** se halla también en el mismo plano. En tanto que los torques individuales o el Torque resultante (τ) respecto al origen de coordenadas (0) apuntan en la dirección del eje Z positivo o negativo.

En este caso es siempre posible reducir el sistema de fuerzas a una sola fuerza: su resultante **F**; ya que τ es perpendicular a **F** y se puede ubicar **F** a una distancia $\vec{r}$ de O de modo que se cumpla:

$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \tau$ (4.10)

Si $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$, $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$, se encuentra que:

$xF_y - yF_x = \tau$

Como F_x, F_y y τ son conocidos la ecuación anterior es la correspondiente a una recta, y por tanto, la resultante no tiene un único punto de aplicación, en su lugar se tiene una línea de aplicación o línea de acción.

EJEMPLO 4.7 La figura muestra los puntos de aplicación y direcciones de cada una de las fuerzas F_1, F_2, y F_3 cuyos módulos son respectivamente: $8\sqrt{2}$, 20, 21 N

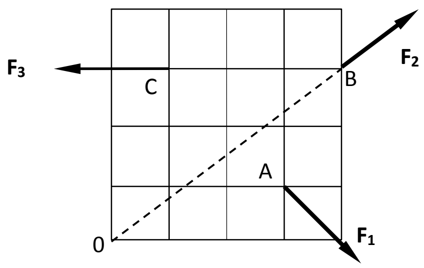

Figura 4.13 casos en los que la resultante

tiene muchos puntos de aplicación

Determinar a) La fuerza resultante b) el torque resultante c) el punto de aplicación de la fuerza resultante.

Solución: a) Según la figura 4.13 las direcciones de las fuerzas **F**$_1$ y **F**$_2$ respecto a la horizontal son respectivamente -45° y 37°.

$\mathbf{F}_1 = 8\sqrt{2}\cos 45\,\mathbf{i} - 8\sqrt{2}\,\text{sen}\,45\,\mathbf{j} = (8, -8)$

$\mathbf{F}_2 = 20\cos 37\,\mathbf{i} + 20\,\text{sen}\,37\,\mathbf{j} = (16, 12)$

$\mathbf{F}_3 = -21\mathbf{i} = (-21, 0)$

Resultante:

$\mathbf{F} = (8+16-21)\mathbf{i} + (-8+12+0)\,\mathbf{j} = (3, 4)$

b) Torque resultante respecto al punto O. Calculando torques componentes. τ_1, τ_2 , τ_3

$\tau_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$; $\mathbf{r}_1 = \vec{0A} = (3,1,0)$; $\mathbf{F}_1 = (8, -8,0)$

$$\tau_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 0 \\ 8 & -8 & 0 \end{vmatrix} = -32\,\mathbf{k}$$

$\tau_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$; $\mathbf{r}_2 = \vec{0B} = (4,3,0)$;

$\mathbf{F}_2 = (16,12,0) = 4(4,3,0)$

Nótese que **r**$_2$ es paralelo a **F**$_2$, de allí que $\tau_2 = 0$

$\tau_3 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3$; $\mathbf{r}_3 = \vec{0C} = (1,3,0)$; $\mathbf{F}_3 = (-21,0,0)$

Expresando el producto vectorial en forma de determinante y desarrollando obtenemos:

$$\tau_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 0 \\ -21 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 63\,\mathbf{k}$$

$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = -32\,\mathbf{k} + 0 + 63\,\mathbf{k}$

$\tau = 31\,\mathbf{k}$

c) sea $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ el vector de posición del punto de aplicación de **F**; entonces: $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \tau$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 31\,\mathbf{k}$$

desarrollando la determinante e identificando términos se obtiene:

$4x - 3y = 31$

que es la ecuación de una recta, y por tanto cualquier punto de esta recta es el punto de aplicación de la fuerza F.

4.6 COMPOSICION DE FUERZAS PARALELAS

Consideremos un sistema de fuerzas paralelas al vector unitario **u**, esto es:

$\mathbf{F}_1 = F_1\,\mathbf{u}$; $\mathbf{F}_2 = F_2\,\mathbf{u}$; $\mathbf{F}_3 = F_3\,\mathbf{u}$

su resultante es:

$\mathbf{F} = (F_1 + F_2 + F_3)\mathbf{u}$ (4.11)

El vector suma de torques respecto al origen de coordenadas es:

$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3$

$\tau = \mathbf{r}_1 \times (F_1\mathbf{u}) + \mathbf{r}_2 \times (F_2\mathbf{u}) + \mathbf{r}_3 \times (F_3\mathbf{u})$

$\tau = (\mathbf{r}_1 F_1 + \mathbf{r}_2 F_2 + \mathbf{r}_3 F_3) \times \mathbf{u}$ (4.12)

Para determinar el punto de aplicación de la fuerza resultante usamos la condición:

$\mathbf{r}_c \times \mathbf{F} = \tau$ (4.13) siendo $\mathbf{r}_c$ la distancia del origen de coordenadas al punto de aplicación de la resultante **F** y se llama centro de las fuerzas paralelas. Sustituyendo (4.11) y (4.12) en (4.13), tenemos:

$\mathbf{r}_c \times (F_1+F_2+F_3)\mathbf{u} = (\mathbf{r}_1F_1 + \mathbf{r}_2F_2 + \mathbf{r}_3F_3)\times\mathbf{u}$

Esta igualdad se verificará únicamente si $\mathbf{r}_c$ tiene el valor siguiente:

$$\mathbf{r}_c = \frac{\mathbf{r}_1F_1+\mathbf{r}_2F_2+\mathbf{r}_3F_3}{F_1+F_2+F_3} \qquad (4.14)$$

o escrita en componentes rectangulares:

$$x_c = \frac{x_1F_1+x_2F_2+x_3F_3}{F_1+F_2+F_3} \qquad (4.15)$$

$$y_c = \frac{y_1F_1+y_2F_2+y_3F_3}{F_1+F_2+F_3} \qquad (4.16)$$

$$z_c = \frac{z_1F_1+z_2F_2+z_3F_3}{F_1+F_2+F_3} \qquad (4.17)$$

NOTA: Cuando se dan más de tres fuerzas se añaden términos similares en el numerador y denominador de las expresiones anteriores

CINEMÁTICA

INTRODUCCION:

La cinemática es la parte de la mecánica que estudia los aspectos geométricos del movimiento prescindiendo de las causas que lo originan. Tanto el movimiento como el reposo son conceptos relativos y su descripción requiere de la definición de un sistema de referencia; cumplida con esta exigencia continuamos con el estudio del movimiento de una partícula en una dimensión y luego en dos dimensiones considerando a la partícula como un punto.

2.1 SISTEMA DE REFERENCIA

En el aula de clases el marco de una ventana permanece en reposo con relación a cualquier punto o puntos del aula, sin embargo sabemos que como parte integrante de nuestro planeta, el aula y la ventana se encuentran en movimiento rotacional en torno al eje terrestre y en movimiento traslacional en torno al sol; Más aún el sistema planetario solar se mueve en una órbita circular de radio muy grande de modo que el movimiento global resultante es bastante complejo por tanto no se puede afirmar si la ventana está en reposo o en movimiento a menos que elijamos un "sistema de referencia" Por ejemplo dentro de un vehículo en marcha a velocidad fija los pasajeros o están sentados o moviéndose de atrás para adelante o viceversa.

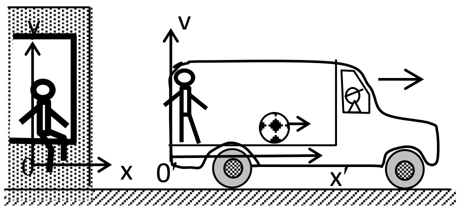

Figura 2.1 Cuando el vehículo está en marcha la rapidez de la pelota es distinta para cada observador

Un observador en el interior del vehículo, puede afirmar con toda razón que los pasajeros sentados están en reposo, mientras que un observador en la pista afirmará que todos los del vehículo están en movimiento y aún puede darse el caso de que algún pasajero moviéndose hacia atrás resulte en reposo para el observador en la pista, dependiendo esto de las velocidades del vehículo y del pasajero

Un sistema de referencia es el lugar desde el cual se observan los fenómenos; puede tomarse como tal a un ente matemático o un cuerpo físico (el sol, la tierra, el centro de nuestra galaxia, un árbol, etc) convencionalmente elegido, con respecto al cual se puede describir el movimiento de los demás cuerpos, o las características de un fenómeno cualquiera. Un sistema de referencia contiene fijo a él un sistema de coordenadas en cuyo origen se supone ubicado el observador.

Los observadores 0 y 0′ de la figura 2.1 utilizan los sistemas de referencia XYZ y X'Y'Z' respectivamente. Si O y O' están en reposo uno con relación al otro entonces observarán el mismo movimiento de la pelota; pero si O y O' están en movimiento relativo sus observaciones del movimiento de la pelota serán diferentes. El sistema de coordenadas más sencillo es el sistema de coordenadas cartesianas

2.2 MOVIMIENTO EN UNA DIMENSION

Es el movimiento a lo largo de una línea recta; por ejemplo el movimiento de una bicicleta a lo largo de una pista estrecha recta y horizontal. En este movimiento restringido sólo hay dos direcciones posibles que distinguiremos una como positiva hacia la derecha y otra negativa hacia la izquierda

Por simplicidad empezaremos con el estudio del movimiento de cuerpos cuya posición puede describirse localizando un sólo punto. Un objeto de este tipo se denomina **partícula** Esta palabra no necesariamente se usará para designar objetos pequeños. Para determinados casos o según el propósito la Tierra por ejemplo puede ser tratada como una partícula moviéndose en torno a otra partícula (el Sol)

DESPLAZAMIENTO Y VELOCIDAD MEDIA

Definimos el movimiento como el cambio de posición de un móvil respecto a un sistema de referencia arbitrariamente elegido.

Construyamos un sistema coordenado, escogiendo sobre una recta, algún punto de referencia 0 como origen. A cualquier otro punto de la recta le asignaremos un número x que indique su distancia al origen. La distancia x será positiva hacia la derecha y negativa hacia la izquierda.

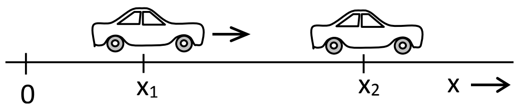

Figura 2.2 Movimiento de una "partícula"

En la figura 2,2 el automóvil considerado como partícula está situado en la posición x_1 en el instante t_1 y en x_2 en el instante t_2 La variación de la posición de la partícula de x_1 a x_2 se denomina **desplazamiento** que designaremos del siguiente modo:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad (2.1)$$

la notación Δx se lee "delta x" corresponde a una solo magnitud, el incremento o variación de x

RAPIDEZ MEDIA

Definimos la rapidez media (o velocidad promedio) de una partícula como la distancia total recorrida y el tiempo empleado en tal movimiento

$$\text{Velocidad media} = \frac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}}$$

En **SI**, la unidad de velocidad es el metro por segundo (**m/s**), en el sistema inglés es (**pie/s)** pero la unidad de uso corriente es el kilómetro por hora (km/h)

VELOCIDAD MEDIA

Se define la **velocidad media** v_m de la partícula, como el cociente entre el desplazamiento Δx y el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\mathbf{v_m} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{ó} \quad \mathbf{v_m} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \qquad (2.2)$$

Obsérvese que el desplazamiento y por tanto la velocidad vectorial media pueden ser positivos o negativos., dependiendo si x_2 es mayor o menor que x_1. Un valor positivo indica un movimiento hacia la derecha, un valor negativo, hacia la izquierda

EJEMPLO 2.1 Si el móvil de la figura 2.2 se encuentra en $x_1 = 5$ m en $t_1 = 10$ s y más tarde se encuentra en $x_2 = 50$ m en $t_2 = 15$ s Encontrar el desplazamiento y la velocidad media del móvil en este intervalo de tiempo.

Solución Por definición el desplazamiento del móvil es: $\Delta x = x_2 - x_1 = 50\text{m} - 5\text{m} = 45$ m

y la velocidad media es:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{50\,\text{m} - 5\,\text{m}}{15\,\text{s} - 10\,\text{s}} = 9 \text{ m/s}$$

EJEMPLO 2.2 ¿Cuánto recorre un ciclista en 5 minutos si su velocidad media es de 24 km/h?

Solución En este caso deseamos hallar el desplazamiento Δx realizado en el intervalo de tiempo Δt de 5 minutos. Según la ecuación (2.2) el desplazamiento esta dado por:

$$\Delta x = v_m \Delta t$$

Desde que la velocidad está expresada en km/h debemos transformar el tiempo de minutos a horas. Haciendo esto último tenemos:

$$\Delta t = 5 \text{ min} \times \frac{1\text{hora}}{60\,\text{min}} = 0{,}0833 \text{ h}$$

Por tanto

$$\Delta x = 24\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \times 0{,}0833 \text{ h} = 2 \text{ km}$$

EJEMPLO 2.3 Un atleta recorre 200 m en 40 s y luego da la vuelta y recorre 50 m en 30 s y en dirección al punto desde el que inició su movimiento. ¿Cuál es el valor de la velocidad media y de la velocidad vectorial media?

Solución La distancia total recorrida es: 200m + 50 m = 250 m y el tiempo total transcurrido es 40 s + 30 s = 70 s. Por tanto la velocidad media es:

Velocidad media = 250m / 42 s = 5,95 m/s

Nótese que esta no es la media de las velocidades que son 5,0 m/s y 1,67 m/s

Para calcular la velocidad vectorial media, determinamos previamente el desplazamiento total. Si x_1 es el punto de partida (origen de coordenadas) podemos tomar $x_1 = 0$ y $t_1 = 0$.

La posición final respecto al origen es $x_2 = 150$ m (ya que retrocedió 50 m). y corresponde a $t_2 = 70$ s. Por tanto $\Delta x = x_2 - x_1 = 150$ m – 0 = 150 m y la velocidad vectorial media es:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{150\,\text{m}}{70\text{s}} = 2{,}14 \text{ m/s}$$

La figura 2.3, muestra un gráfico de x en función de t para un movimiento arbitrario a lo largo del eje x.

Cada punto de la curva representa la posición x del móvil en el instante t de su ocurrencia. Sobre la curva se ha trazado una recta que une la posición inicial P_1 y la posición final P_2. El desplazamiento $\Delta x = x_2 - x_1$ y el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ vienen indicados para estos dos puntos

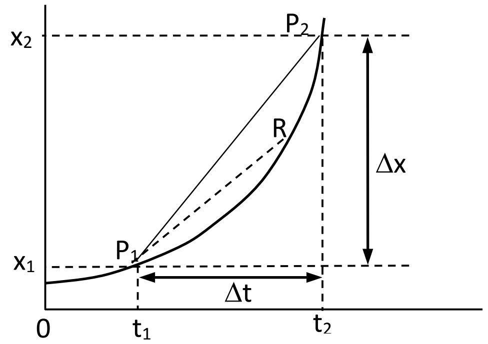

Figura 2.3 Grafica de x en función de t

El segmento rectilíneo entre P_1 y P_2 es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos Δx y Δt. El cociente $\Delta x/\Delta t$ se denomina pendiente de la recta y en términos geométricos es la medida de la inclinación de la recta P_1P_2. Como la pendiente de esta recta es precisamente la velocidad media en el intervalo de tiempo Δt, tenemos así una interpretación geométrica de la velocidad media. Esto es,

la velocidad media es la pendiente de la recta que une los puntos (t_1 ,x_1) y (t_2 , x_2).

A menos que la velocidad media sea constante, la velocidad media dependerá del intervalo de tiempo elegido. Por ejemplo para un punto intermedio tal como R, la inclinación de la recta P_1R es menor que la de P_1P_2, por consiguiente la velocidad media será también menor.

VELOCIDAD INSTANTANEA

Para que el movimiento sea perceptible es necesario observar la posición del móvil en más de un instante De este modo será posible definir la velocidad en un instante mediante un proceso de paso al límite

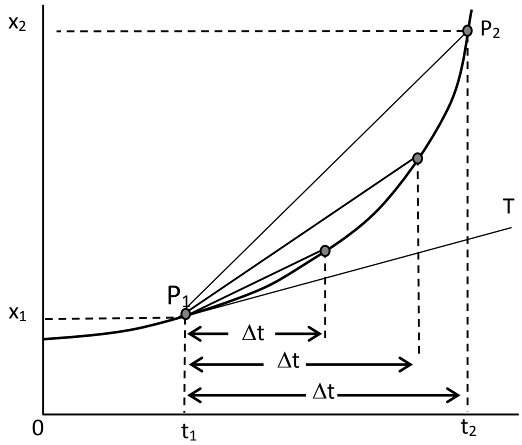

Figura 2.4 La inclinación de las secantes tienden a la inclinación límite de la recta tangente P_1T. Cuando el punto P_2 tiende a confundirse con P_1

La misma función x de t de la figura 2.3, se representa en la figura 2.4 mostrando en esta última una secuencia de intervalos Δt, cada uno de ellos menor que el anterior. En cada intervalo de tiempo Δt, la velocidad media es la pendiente de la recta secante correspondiente a ese intervalo. Se puede ver que cuando Δt disminuye en cada vez, las secantes disminuyen de inclinación, pero solo hasta la inclinación de la recta tangente en el punto P_1 en el instante t_1. Se define la pendiente de la recta tangente como la velocidad instantánea en el instante t_1. En otras palabras:

La velocidad instantánea en un punto de la trayectoria es la pendiente de la recta tangente a la curva x en función de t en dicho punto.

Es importante notar que cuando el intervalo de tiempo tiende a cero ($\Delta t \to 0$), Δx también tiende a cero ($\Delta x \to 0$), pero el cociente $\Delta x/\Delta t$ tiende a la pendiente de la recta tangente P_1T. Como la pendiente de la tangente es el límite de la relación $\Delta x/\Delta t$ cuando $\Delta t \to 0$, tenemos la definición matemática de la velocidad instantánea:

La velocidad instantánea es el límite de la relación $\Delta x/\Delta t$ cuando Δt se aproxima al valor cero

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.3)$$

Este límite se denomina derivada de x respecto a t. La notación usual para la derivada es dx/dt

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad (2.4)$$

Esta pendiente puede ser positiva (x creciente) o negativa (x decreciente), por consiguiente la velocidad vectorial instantánea puede ser positiva o negativa en un movimiento unidimensional

EJEMPLO 2.4 La función x de t representada en la figura 2.5 proporciona la posición de una partícula en cualquier instante. Encuentre la velocidad instantánea en el instante t = 2 s

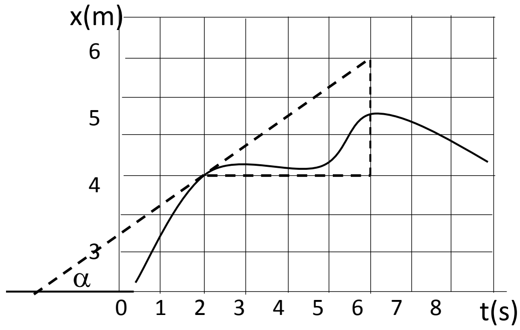

Figura 2.5 Posición en función del tiempo

Solución En t = 2 s, la pendiente de la recta tangente a la curva puede calcularse con la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta tangente y el eje +X. Esto es; la velocidad instantánea en t = 2 s es:

$$v = \frac{dx}{dt} = \tan\alpha = 3m / 4 s = 0{,}75 \text{ m/s}$$

Se puede ver que la velocidad instantánea será cero en t = 3 s y t = 6,4 s y alcanzará su máximo valor en t = 5,5 s. y la velocidad es negativa para t > 6,3 s

ACELERACION MEDIA E INSTANTANEA

En la mayoría de los casos reales, la velocidad instantánea varía con el tiempo. Entonces decimos que el móvil está acelerando. La aceleración media en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ se define como el cociente $\Delta v/\Delta t$, en donde $\Delta v = v_2 - v_1$ es la variación de la velocidad instantánea durante dicho intervalo de tiempo:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (2.5)$$

la aceleración se expresa en m/s por segundo, o más estrictamente en m/s^2. Por ejemplo si la aceleración de un móvil es de 10 m/s^2, quiere decir que si parte del reposo, en 1 segundo la velocidad ha cambiado de 0 a 10 m/s, en 2 segundos a 20 m/s, en 3 s a 30 m/s y así sucesivamente.

La aceleración instantánea es el límite del cociente $\Delta v/\Delta t$, cuando Δt tiende a cero. Si representamos la velocidad v en función del tiempo, la aceleración instantánea en el instante t se define como la pendiente de la recta tangente a la curva en ese instante

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (2.6)$$

o bien

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad (2.7)$$

Reemplazando la ecuación (2.4) en (2.7)

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (2.8)$$

Es decir la aceleración es la segunda derivada respecto al tiempo de la posición de la partícula

Si la velocidad es constante, la aceleración es cero ya que $\Delta v = 0$

MOVIMIENTO CON ACELERACION CONSTANTE

El movimiento en el cual la velocidad cambia de modo uniforme, la aceleración se mantiene constante. Se le denomina **movimiento rectilíneo uniformemente variado.** Si el móvil parte de la posición x_o con una velocidad inicial v_o; sus ecuaciones son:

$$x = x_o + v_m t \qquad (2.13)$$

$$v = v_o + at \qquad (2.14)$$

$$a = \frac{v - v_o}{t} \qquad (2.15)$$

donde v_m es la velocidad media cuya expresión para este tipo de movimiento está dada por:

$$v_m = ½ (v + v_o) \qquad (2.16)$$

Combinando las ecuaciones anteriores también se pueden escribir otras ecuaciones alternativas:

$$\Delta x = v_o t + ½ at^2 \qquad (2.17)$$

$$v = \sqrt{v_o^2 + 2a\Delta x} \qquad (2.18)$$

Si el móvil parte del origen de coordenadas y con velocidad inicial cero, las fórmulas del 2.13 al 2.18 se simplifican notablemente.

EJEMPLO 2.8 Se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 40 m/s .Si está sometida hacia abajo a una aceleración de 10 m/s^2 ¿Cuánto tiempo se tardará en alcanzar la altura máxima?

Solución Elegimos como origen el punto de partida y sentido positivo la dirección hacia arriba. Los datos del problema son: v_o = 40 m/s, a = –10 m/s^2, al alcanzar la máxima altura su velocidad es cero (v = 0). Luego el tiempo transcurrido se obtiene despejando t de la ecuación 2.14

$$t = \frac{v - v_o}{a} = \frac{0 - 40\,m/s}{-10\,m/s^2} = 4\ s$$

EJEMPLO 2.9 Una partícula se mueve en línea recta y su posición en función del tiempo está dada por: $x = t^3 – t^2 – 5t$ donde x se mide en metros y t en segundos. Calcular: a) la velocidad media en el intervalo: 2 < t < 5. b) la velocidad instantánea en el instante t. c) la aceleración media en el intervalo 2 < t <5. d) la aceleración instantánea en el instante t

Solución: a) Calculando el desplazamiento entre los instantes respectivos:

$t_1 = 2$ s, $x_1 = (2)^3 – (2)^2 – 5(2) = – 6$ m

$t_2 = 5$ s, $x_2 = (5)^3 – (5)^2 – 5(5) = 75$ m

$\Delta x = x_2 – x_1 = 75 – (– 6) = 81$ m

$\Delta t = t_2 – t_1 = 5 – 2 = 3$ s

velocidad media $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{81m}{3s}$ = 27 m/s

b) velocidad instantánea

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[t^3 - t^2 - 5t] = 3t^2 – 2t – 5$$

c) Calculando la aceleración media entre los instantes dados usando $v = 3t^2 – 2t – 5$

$t_1 = 2$ s, $v_1 = 3(2)^2 – 2(2) – 5 = 3$ m/s

$t_2 = 5$ s, $v_2 = 3(5)^2 – 2(5) – 5 = 60$ m/s

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{57}{3} = 19\ m/s^2$$

d) aceleración instantânea

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}[3t^2 - 2t - 5]$$

$a = 6t – 2$

CAIDA LIBRE

El ejemplo más común de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es el movimiento de un cuerpo que cae libremente por acción de la gravedad. En este movimiento se desprecia la resistencia del aire, y se cumple que, todos los cuerpos, sin importar su forma, peso o tamaño, caen con la misma aceleración llamada aceleración de la gravedad que se representa por g. El valor de la aceleración de la gravedad varía de un punto a otro de la superficie terrestre pero siempre cercano a:

$g = 9{,}80\ m/s^2 = 980\ cm/s^2 = 32\ pies/s^2$

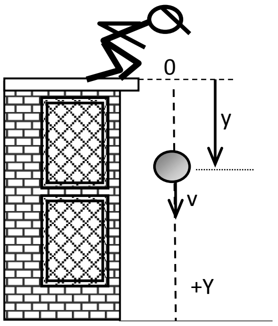

Figura 2.6 Esfera alejándose del observador

En los diversos lugares de la Tierra, el valor de "g" varía con la distancia al centro de la Tierra, es mayor en los polos que en el Ecuador. Disminuye a medida que aumenta la altura sobre la superficie terrestre.

Si el movimiento se realiza en el sistema de coordenadas cartesianas con su semieje +Y dirigido hacia abajo y el móvil parte del origen figura 2.6, las ecuaciones que describen este movimiento son:

velocidad $v = gt$ (2.19)

posición $y = \frac{1}{2} g t^2$ (2.20)

tiempo de caída $t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$ (2.21)

Las ecuaciones anteriores se hacen más complejas cuando elegimos un sistema de coordenadas con su origen ubicado en el piso y el eje +Y dirigido hacia arriba; entonces el móvil inicia su caída desde una altura $y_o = H$ (techo del edificio) y su aceleración está dirigida en el sentido negativo del eje Y (véase figura 2.7)

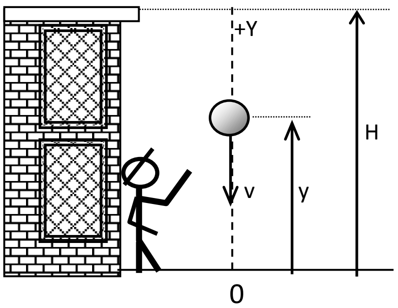

Figura 2.7 Esfera acercándose hacia el piso

En la figura 2.7 , H es la posición inicial e "y" la posición en el instante t. Entonces las ecuaciones de la velocidad y desplazamiento de la caída libre en el eje Y resultan de modificar las siguientes ecuaciones generales

$v = v_o + at$

$\Delta y = v_o t + \frac{1}{2} at^2$

donde debemos hacer $v_o = 0$, $y_o = H$, $a = -g$, $\Delta y = y - y_o = y - H$, obteniendo finalmente:

$v = -gt$ (2.22)

$y = H - \frac{1}{2} gt^2$ (2.23)

EJEMPLO 2.10 Se deja caer una pelota desde la parte superior de un edificio. La pelota tarda 0,10 s en pasar enfrente de una ventana de 2,50 m de altura que se encuentra a una distancia dada de la parte superior del edificio. a) ¿Cuál será la rapidez de la pelota cuando pasa por la parte superior de la ventana? b) ¿Cuál es la distancia de la parte superior de la ventana al punto donde se soltó la pelota?

Solución: Entre la parte superior e inferior de la ventana la pelota realiza un movimiento uniformemente acelerado con una velocidad inicial v_1 (velocidad en la parte superior de la ventana) y recorriendo una distancia h = 2,5 m en t = 0,1 s. Estas cantidades están relacionadas por: $h = v_1 t + \frac{1}{2} gt^2$

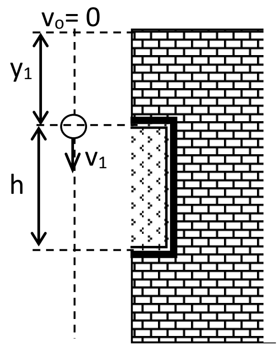

Figura 2.8 Caída libre

de donde obtenemos la velocidad en la parte superior de la ventana:

$$v_1 = \frac{h - \frac{1}{2} gt^2}{t} = \frac{2{,}5 - 4{,}9(0{,}1)^2}{0{,}1}$$

$v_1 = 24{,}51\ m/s$

Desde el punto de partida, la pelota recorre una distancia y_1 hasta la parte superior de la ventana alcanzando allí la velocidad v_1. Por consiguiente aplicando las ecuaciones (2.19) y (2.20) eliminamos el tiempo y tenemos:

$$y_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(24.51)^2}{19.6} = 30{,}65\ m$$

2.3 INTEGRACION

En secciones anteriores se vio que partiendo de la función posición se determinó por derivación la velocidad y la aceleración. El problema inverso consiste en determinar la velocidad o la posición partiendo del conocimiento de la aceleración. Para tal propósito usamos el procedimiento denominado integración. Si conocemos la aceleración podemos determinar la función velocidad v(t) de tal modo que su derivada es la aceleración. Para el caso supondremos que la aceleración es constante

$$\frac{dv(t)}{dt} = a$$

la velocidad es la función del tiempo, cuya derivada es igual a esta constante. Una función de este tipo es:

$v(t) = at$

Sin embargo, esta función no es la expresión más general de v(t) que satisface la relación dv/dt = a. En particular podemos añadir cualquier constante a at sin modificar el valor de la derivada respecto al tiempo. Llamando v_o a esta constante resulta:

$v(t) = at + v_o$

la constante v_o es la velocidad inicial. La función posición x es aquella función cuya derivada es la velocidad:

$$\frac{dx}{dt} = at + v_o$$

Tratando a esta función término por término podemos ver que $v_o t + c_1$ es la función cuya derivada es v_o y $\frac{1}{2} at^2 + c_2$ es la función cuya derivada es at. Sumando estos resultados y llamando x_o a la suma de las constantes obtenemos la función posición:

$x = x_o + v_o t + \frac{1}{2} at^2$

Siempre que se obtenga una función a partir de su derivada debe añadirse una constante arbitraria a la función general

Se ha visto que para obtener la función posición a partir de la aceleración se requieren de dos constantes, Estas constantes reciben el nombre de **condiciones iniciales**, esto es, para el tiempo t = 0, la velocidad es v_o y la posición es x_o

El problema de la integración está relacionado con el de la obtención del área bajo, una curva. Consideremos el caso de velocidad constante. El desplazamiento Δx durante un intervalo de tiempo Δt es precisamente igual a la velocidad por el intervalo de tiempo:

$\Delta x = v_o \Delta t$

Este es el área bajo la curva v en función de t como puede verse en la figura 2.9

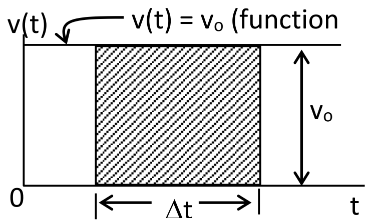

Figura 2.9 Area sombreada = desplazamiento

Cuando la velocidad es variable, la gráfica de la función velocidad es como se observa en la figura 2.10

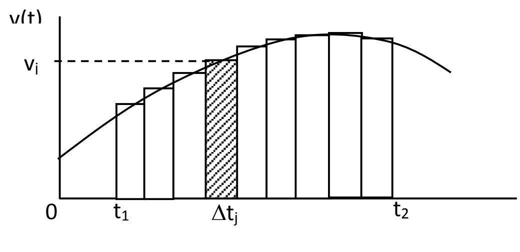

Figura 2.10 Sumando áreas rectangulares

El área bajo la curva entre t_1 y t_2 no es sino la suma de las áreas de rectángulos de ancho Δt_j y altura variable v_j. Esto es:

$$\Delta x \approx \sum v_j \Delta t_j \qquad (2.24)$$

donde el símbolo $\sum$ (sigma mayúscula) indica la suma. La aproximación anterior se puede hacer todo lo bueno que se desee haciendo Δt cada vez más pequeños y aumentando por tanto el número de rectángulos En el límite correspondiente a intervalos de tiempo cada vez menores. Esta suma es igual al área comprendida bajo la curva que equivale por tanto al desplazamiento. Este límite se denomina integral y se escribe del modo siguiente:

$$\Delta x = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_j v_j \Delta t_j = \int v.dt \qquad (2.25)$$

El signo integral $\int$ es una S alargada e indica una suma.

En forma análoga la variación de la velocidad en un intervalo de tiempo puede obtenerse como el área bajo la curva aceleración (a) en función del tiempo (t). Esto es:

$$\Delta v = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_j a_j \Delta t_j = \int a.dt \qquad (2.26)$$

EJEMPLO 2.11 En la figura 2.11 se muestra la curva v en función de t y representa el movimiento de una partícula con aceleración constante a. Calculando el área bajo la curva demuestre que la velocidad media en un intervalo de tiempo que comienza en t = 0 esta dado por $v_m = \frac{1}{2}(v_o + v)$

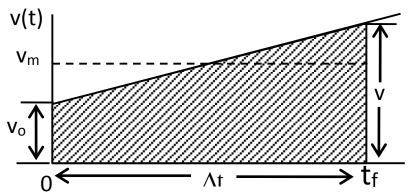

Figura 2.11 Velocidad media

Solución El desplazamiento desde t = 0 hasta el instante final t_f, está representado por el área sombreada, que corresponde a un trapecio de bases v_o, v y altura Δt. Por tanto el desplazamiento es: $\Delta x = \frac{1}{2}(v_o + v)\,\Delta t = v_m \Delta t$ de donde la velocidad media es $v_m = \frac{1}{2}(v_o + v)$

EJEMPLO 2.12 Una partícula se mueve de tal modo que la función velocidad está dada por: v = gt, donde g es una constante. Encontrar por integración la expresión de la posición, sabiendo que para t = 0, se encuentra en x = 5 metros.

Solución De la ecuación 2.25, el desplazamiento está dado por:

$$\Delta x = \int v dt = \int gt\, dt \qquad (1)$$

Desde que la integración es la operación inversa a la derivación podemos aplicar la regla de la derivación dada al final del ejemplo 2.6 Esto es: Para integrar se añade la unidad al exponente de la variable de integración y al coeficiente se divide entre el exponente resultante: De este modo tenemos:

$\Delta x = \frac{g}{2}t^2$ ó $x = x_o + ½\, gt^2$ (2)

El valor de la constante de integración x_o, se encuentra aplicando las condiciones iniciales (t = 0, x = 5 metros) Reemplazando estos datos en la expresión anterior hallamos para x_o = 5 metros. Luego la expresión de la posición de la partícula en función del tiempo, en **SI** es:

$x = 5 + ½\, gt^2$ (3)

Generalizamos este resultado del siguiente modo:

Para integrar la expresión kt^n, se añade la unidad al exponente y se divide al coeficiente entre el exponente resultante

$\int k\, t^n\, dt = \frac{k}{n+1} t^{n+1} + c$ (4)

El proceso de integración es mucho más complejo que la derivación, los resultados no siempre se obtienen de forma inmediata como se mostró en el ejemplo anterior. En muchos casos solo se obtienen valores aproximados. Las calculadoras científicas permiten obtener todas las integrales de necesidad académica

EJEMPLO 2.13 Una partícula está sometida a la acción de fuerzas intermitentes de tipo explosivo, siendo su aceleración resultante la que se muestra en la figura

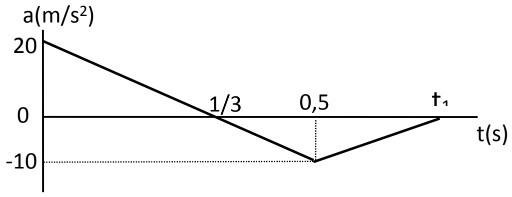

Figura 2.12 Gráfica a = f(t) de un movimiento variado

Si el móvil parte del reposo y termina en el reposo en el tiempo t_1. Calcular: a) el tiempo t_1. b) la distancia total recorrida.

Solución. a) La gráfica "a vs t" es una línea quebrada y el área "debajo de la curva" es igual a la suma de dos áreas: una positiva (triángulo de base 1/3) y otra negativa (triángulo de base t_1-1/3). Como la velocidad final en t_1 es cero, la suma de estas áreas es cero; por lo cual:

$$\frac{(1/3)(20)}{2} = \frac{(t_1 - 1/3)(10)}{2}$$

de donde t_1 = 1 segundo.

b) Para calcular la distancia recorrida debemos determinar previamente la ecuación de la velocidad.

$v = \int a\, dt$ (1)

Nótese en la gráfica, que la aceleración "a" varía linealmente decreciendo en el intervalo $0 < t < 0.5$ y aumentando en $0.5 < t < 1$.

<u>i) Intervalo $0 < t < 0,5$</u>. En la gráfica 2.13 la ecuación de la aceleración se obtiene admitiendo que el punto P de coordenadas (t,a) pertenece a la recta que pasa por los puntos A y B. Luego igualando pendientes se tiene:

$$\frac{a-20}{t-0} = \frac{20-(-10)}{0-0,5}$$

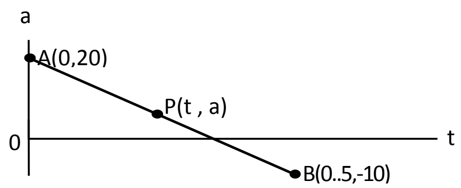

Figura 2.13 Recta de pendiente negativa

Esto es a = 20 – 60t, que sustituido en (1) e integrando, nos da:

$$v = 20t - 30t^2 + c_1$$

El valor de la constante de integración c_1 se obtiene con la condición inicial de que en t = 0 es v = 0; por tanto c_1 = 0, y así tenemos:

$v = 20\,t - 30t^2$ (2)

la distancia recorrida en este intervalo es:

$\Delta x_1 = \int v\,dt = \int_0^{0,5} \left(20t - 30t^2\right) dt$

$\Delta x_1 = 10t^2 - 10t^3 \Big]_0^{0.5}$

$\Delta x_1 = 10[(0,5)^2 - (0)^2] - 10[(0,5)^3 - (0)^3]$

$\Delta x_1 = 1,25$

Si el móvil parte del origen de coordenadas. La ecuación del movimiento es:

$x_1 = 10t^2 - 10t^3$ (3)

ii) <u>Intervalo $0,5 < t < 1$</u>, aplicamos el mismo procedimiento para hallar la ecuación de la aceleración. Esto es; la ecuación de la recta que pasa por los puntos B(0, 5, –10) y C(1 , 0). es:

$$\frac{a-(-10)}{t-0,5} = \frac{0-(-10)}{1-0.5}$$

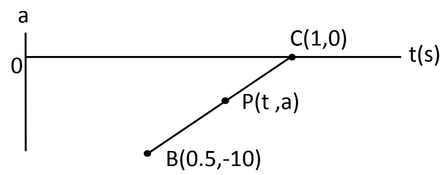

Figura 2.14 Recta de pendiente positiva

Así, la ecuación buscada es a = 20t – 20, que sustituida en la ecuación (1) conduce a:

$v = 10t^2 - 20t + c_2$ (4)

Nótese que para t = 0,5 s las ecuaciones (4) y (2) deben dar el mismo resultado. De allí que:

$10t^2 - 20t + c_2 = 20t - 30t^2$

$10(0,5)^2 - 20(0,5) + c_2 = 20(0,5) - 30(0,5)^2$

Así, obtenemos para c_2 = 10 m/s; por tanto:

$v = 10t^2 - 20t + 10$ (5)

La distancia recorrida en este intervalo es:

$$\Delta x_2 = \int vdt = \int_{0,5}^{1} (10t^2 - 20t + 10)dt \qquad (6)$$

$$\Delta x_2 = \frac{10}{3}t^3 - 10t^2 + 10t \,\Big]_{0.5}^{1} = 0{,}4166 \text{ m}$$

La distancia total recorrida es:

$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 =$ 1,25 + 0,4166 = 1,666 m

$\Delta x = 5/3$ m.

La ecuación del movimiento en el intervalo 0,5 < t < 1 se obtiene por integración indefinida (sin límites) de la expresión (6) cuyo resultado es:

$$x = \frac{10}{3}t^3 - 10t^2 + 10t + c_3 \qquad (7)$$

el valor de c_3 debe ser tal que en t = 0,5 s las ecuaciones (7) y (3) deben dar igual resultado

$$\frac{10}{3}t^3 - 10t^2 + 10t + c_3 = 10t^2 - 10t^3$$

$$\frac{10}{3}(0{,}5)^3 - 10(0{,}5)^2 + 10(0{,}5) + c_3 = 10(0{,}5)^2 - 10(0{,}5)^3$$

de donde $c_3 = -5/3$. Por tanto en el intervalo (0,5 < t < 1). la ecuación del movimiento es:

$$x = \frac{10}{3}t^3 - 10t^2 + 10t - \frac{5}{3}; \qquad (8)$$

y vemos que para t = 1s, es x = 5/3 m. Luego

$$x = \begin{cases} 10t^2 - 10t^3 & ; \quad 0 < t < 0{,}5 \\ \frac{10}{3}t^3 - 10t^2 + 10t - \frac{5}{3} & ; \quad 0{,}5 < t < 1 \end{cases}$$

2.4 MOVIMIENTO EN DOS Y TRES DIMENSIONES

Para el estudio del movimiento de una partícula en dos y tres dimensiones adoptaremos el tratamiento vectorial

DESPLAZAMIENTO

Es el vector que indica el cambio de posición de una partícula entre dos puntos de su trayectoria; está dirigido de la posición inicial a la final. En la figura 2.15, Δ**r** es el desplazamiento entre los puntos P_1 y P_2 cuyos vectores de posición son $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ respectivamente.

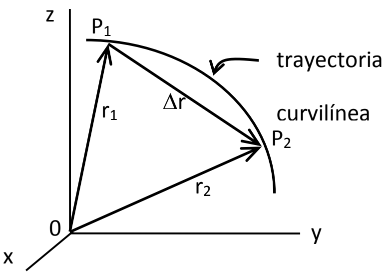

Figura 2.15 Trayectoria y desplazamiento

De donde tenemos el vector desplazamiento:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \qquad (2.27)$$

El movimiento de una partícula se conoce, cuando la posición de la partícula queda determinada en cualquier instante con respecto al sistema de referencia que se usa. Esto se consigue especificando la dependencia de sus coordenadas en función del tiempo

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t) \qquad (2.28)$$

o bien el vector de posición de la partícula:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \qquad (2.29)$$

Cuando una partícula se mueve en el espacio sobre una trayectoria cualquiera, sus proyecciones se desplazan en línea recta a lo largo de los tres ejes. El movimiento puede reconstruirse a partir de los movimientos de éstas tres proyecciones: ecuaciones (2.28).

VELOCIDAD MEDIA E INSTANTANEA

Es la razón entre el desplazamiento Δ**r** de una partícula y el intervalo de tiempo Δt del movimiento (ver figura 2.15)

$$\mathbf{v_m} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \text{ó} \quad \mathbf{v_m} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \qquad (2.30)$$

En la figura 2.16, una partícula pasa por el punto P en el instante t y un tiempo después el móvil alcanzará el punto Q en el instante t + Δt. Si Δt es muy corto el punto Q estará muy cerca de P y tiende a confundirse con él.

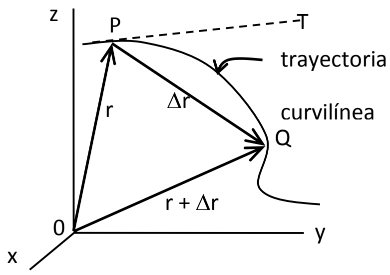

Figura.2.16 Desplazamiento límite (d**r**)

Esto es, cuando $\Delta t \to 0$, también $\Delta \mathbf{r} \to 0$ sin embargo el cociente $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ no necesariamente tiende a cero. El valor límite de este cociente se denomina velocidad instantánea **v** que significa velocidad en el punto P y en el instante t y está dado por:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \qquad (2.31)$$

ó bien,

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \qquad (2.32)$$

En la figura 2.16 se muestra también que cuando $\Delta t \to 0$, Δ**r** tiende a girar de la dirección inicial PQ hacia la dirección límite PT, por tanto la velocidad instantánea **v** = d**r**/dt apunta en la dirección de la tangente a la trayectoria en el punto P. De allí que el valor de la velocidad instantánea es la pendiente de la tangente a la curva **r** = **r** (t).

EJEMPLO 2.14 Un barco navega 300 km. hacia el Este en 20 minutos y luego hacia el Norte durante 24 minutos recorriendo ahora 400 km. Encuentre la rapidez media y la velocidad media del barco durante: (a) la primera etapa del viaje (b) la segunda etapa del viaje (c) todo el trayecto.

Solución En la figura 2.17: consideremos por separado los diferentes desplazamientos:

primera parte del viaje: AB = 300 km.;

segunda parte del viaje: BC = 400 km.;

viaje completo ABC⇔ AC.

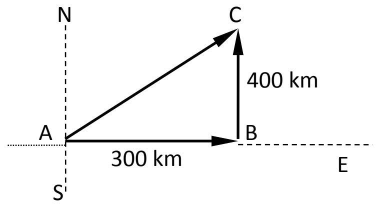

Figura 2.17 Dos desplazamientos sucesivos

Con las ecuaciones respectivas y la codificación que se da a continuación presentamos los resultados en la tabla 2.1

Distancia (km) Δs

desplazamiento (km) $\Delta \mathbf{r}$

tiempo (minutos) Δt

rapidez (media) (km/h) $v = \Delta s/\Delta t$

velocidad media (km/h) $\mathbf{v}_m = \Delta \mathbf{r}/\Delta t$

modulo de $\mathbf{v}_m$ (km/h) v_m

Tabla 2.1 rapidez y velocidad media

	AB	BC	ABC
Δs	300	400	700
$\Delta \mathbf{r}$	300**i**	400 **j**	300**i** + 400 **j**
Δt	20	24	44
V	15	16,67	15,91
$\mathbf{v}_m$	15 **i**	16,67 **j**	6,82**i** + 9,09**j**
v_m	15	16,67	11,36

Observar que el módulo de la velocidad media en el viaje completo es diferente de la rapidez media para el mismo viaje.

ACELERACION MEDIA E INSTANTANEA

La aceleración media es el cociente entre la variación de la velocidad instantánea $\Delta \mathbf{v}$ y el intervalo de tiempo Δt correspondiente a esta variación:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad ó \quad a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \qquad (2.33)$$

La aceleración en un punto de la trayectoria y en determinado instante es, la **aceleración instantánea** que se define como el límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo Δt tiende a cero

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{dv}{dt} \qquad (2.34)$$

o bien

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad (2.35)$$

Reemplazando la ecuación (2.32) en (2.35) tenemos:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} \qquad (2.36)$$

Es decir la aceleración es la segunda derivada respecto al tiempo del vector de posición de la partícula

Si se conoce la ecuación de la aceleración es posible obtener la expresión de la velocidad por el procedimiento del cálculo integral:

$$\frac{dv}{dt} = a \qquad (2.37)$$

de donde escribimos;

$$\int dv = \int a\, dt \qquad (2.38)$$

Al evaluar la integral se obtiene una constante de integración que no puede determinarse a menos que se conozca de antemano el valor de la velocidad inicial en el instante específico; (condición inicial del problema). Esto equivale a decir que se debe conocer los límites de integración de la ecuación (2.38).

A menudo se encontrará que se conoce o puede especificarse la velocidad inicial v_o cuando t = 0, entonces la expresión (2.38) se debe escribir así:

$$\int_{v_o}^{v} d\mathbf{v} = \int_o^t \mathbf{a}\, dt$$

de donde integrando en el primer miembro y despejando la velocidad instantánea se tiene:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \int_o^t a\, dt \qquad (2.39)$$

Procediendo análogamente y utilizando otra condición inicial es posible evaluar el vector de posición de la partícula. La condición inicial en este caso especifica, la posición $\mathbf{r}_o$ en el instante t_o.(generalmente t_o = 0)

d**r** / dt = **v** ó d**r** = **v** dt

$\int_{\mathbf{r}_o}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} \;=\; \int_o^t \mathbf{v}\, dt$

integrando en el primer miembro y despejando **r** tenemos:

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \int_o^t \mathbf{v}\, dt$ (2.40)

Las ecuaciones (2.39) y (2.40) permiten describir completamente el movimiento de la partícula cuya aceleración ha sido dada junto con las condiciones iniciales del problema.

EJEMPLO 2.15 Las ecuaciones del movimiento de una partícula son: $x(t) = -2t^2 + 3t^3$ $y(t) = 4t^2 - t^4$; $z(t) = 10t - t^3$; donde x, y, z se miden en metros y t en segundos. Calcular. a) El vector velocidad y el vector aceleración en el tiempo t. b) El módulo de la velocidad cuando t = 1,5 s. c) El módulo de la aceleración cuando t = 1,5 s. d) El vector de posición cuando t = 5 s

Solución Del enunciado: $x = -2t^2 + 3t^3$; $y = 4t^2 - t^4$; $z = 10t - t^3$

a) Las componentes de la velocidad son:

$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-2t^2 + 3t^3) = -4t + 9t^2$,

$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(4t^2 - t^4) = 8t - 4t^3$,

$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(10t - t^3) = 10 - 3t^2$,

pero $\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$; entonces:

$\mathbf{v} = (-4t + 9t^2)\,\mathbf{i} + (8t - 4t^3)\,\mathbf{j} + (10 - 3t^2)\mathbf{k}$

Del mismo modo hallamos previamente las componentes de la aceleración

$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-4t + 9t^2) = -4 + 18t$;

$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(8t - 4t^3) = 8 - 12t^2$

$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d}{dt}(10 - 3t^2) = -6t$

$\mathbf{a} = (-4 + 18t)\,\mathbf{i} + (8 - 12t^2)\,\mathbf{j} - 6t\,\mathbf{k}$

b) El módulo de la velocidad es:

$v = [(-4t + 9t^2)^2 + (8t - 4t^3)^2 + (10 - 3t^2)^2]^{1/2}$

para t = 1,5 s se tiene v = 14,69 m/s

c) $a = [(-4 + 18t)^2 + (8 - 12t^2)^2 + (-6t)^2]^{1/2}$

para t = 1,5 s se tiene $a = 31,16\ m/s^2$

d) para t = 5s, $x = -2(5)^2 + 3(5)^3 = 325$

$y = 4(5)^2 - (5)^4 = -525$ metros

$z = 10(5) - (5)^3 = -75$ metros

$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

$\mathbf{r} = 325\,\mathbf{i} - 525\,\mathbf{j} - 75\,\mathbf{k}$