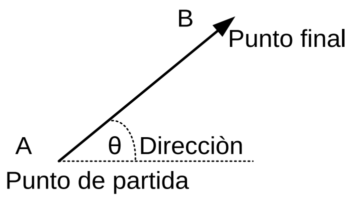
ANALISIS VECTORIAL

Vector: Es un operador matemático que sirve para representar a las magnitudes vectoriales.



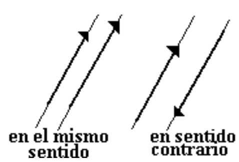
Notación

$\overrightarrow{AB}$: Se lee vector AB

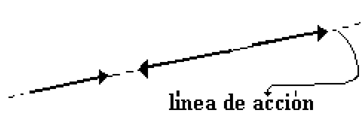
$a, |\vec{a}|, |\overrightarrow{AB}|$: Módulo o intensidad del vector.

CLASES DE VECTORES

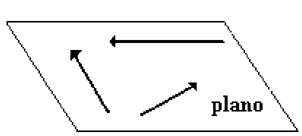
- Vectores **paralelos**: Cuando sus líneas de acción son paralelas



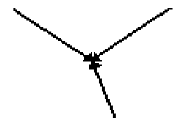
- Vectores **colinéales:** **c**uando se encuentran sobre la misma línea de acción.



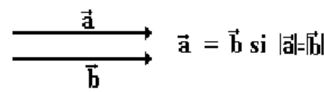
- Vectores coplanares**:** **c**uando se encuentran en un mismo plano



- Vectores concurrentes**:** **c**uando se interceptan en un mismo punto.

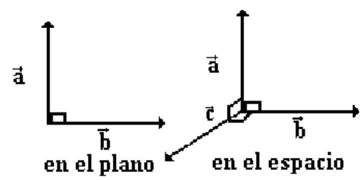


- Vectores iguales**:** **c**uando tienen el mismo módulo y la misma dirección

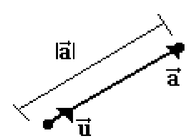


- Vectores perpendiculares (ortogonales):

Cuando forman 90º entre si



- **Vectores unitarios**: Cuando su módulo es “1”.Sirven para indicar la orientación de un vector

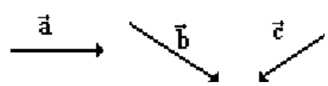


$\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ por lo tanto $\vec{a} = |\vec{a}|.\vec{u}$

$|\vec{u}| = 1$

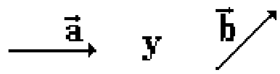
SUMA DE VECTORES

Método del polígono sean los vectores

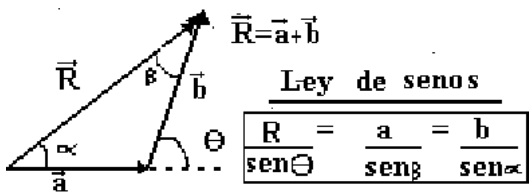


Para encontrar la suma o resultante, los vectores dados se colocan uno a continuación del otro, manteniendo su misma dirección. La resultante será el vector que une el punto de partida con el punto de llegada.

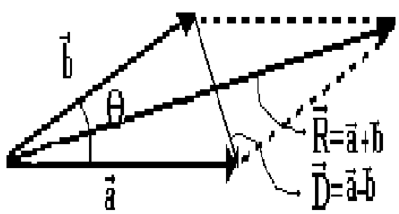
Método del triángulo

Sean los vectores 

Para obtener la resultante se procede de la misma forma que el método del polígono



Nos permite encontrar el módulo de la resultante y de la diferencia de dos vectores conociendo el ángulo que forman y sus módulos respectivos.



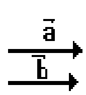
Donde:

$$|\vec{R}| = |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta} \quad \text{y}$$

$$|\vec{D}| = |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

casos particulares de la ley del coseno

- Resultante máxima: cuando los vectores forman 0º entre sí, es decir son paralelos pero en el mismo sentido.

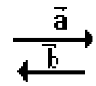


$\cos 0º = 1$

$$R = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos 0º} \Rightarrow R = a+b$$

-Resultante mínima: cuando los vectores forman 180º,es decir son paralelos pero en sentido contrario.

Sean

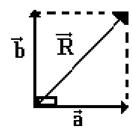


$\cos 180º = -1$

$$R = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos 180º} \Rightarrow R = a-b$$

-Vectores perpendiculares:

Cuando forman 90º



$$R = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos 90º}$$

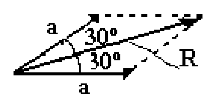
$$R = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$D = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 90º}$$

$$D = \sqrt{a^2+b^2} \therefore D = R$$

otros casos

-Cuando los vectores forman 60º y tienen igual módulo

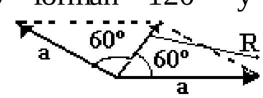


$\cos 60º = \frac{1}{2}$

$$R = \sqrt{a^2+a^2+2aa\cos 60º} = a\sqrt{3}$$

y $$D = \sqrt{a^2+a^2-2aa\cos 60º} = a$$

-Cuando forman 120º y tienen igual módulo

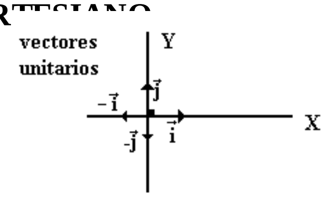


$\cos 120º = -\frac{1}{2}$

$$R = \sqrt{a^2+a^2+2aa\cos 120º} = a \quad \text{y}$$

$$D = \sqrt{a^2+a^2-2aa\cos 120º} = a\sqrt{3}$$

VECTORES EN EL PLANO CARTESIANO



$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |1|$

$\vec{i}$:vector unitario en el eje X positivo; $\vec{j}$: vector unitario en el eje Y positivo $-\vec{i}$:vector unitario en el eje X negativo $-\vec{j}$:vector unitario en el eje Y negativo

$\rightarrow |\vec{i} + \vec{j}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

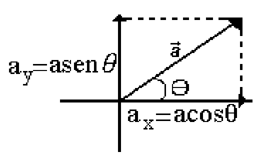
$|\vec{i} - \vec{j}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \therefore |\vec{i} + \vec{j}| = |\vec{i} - \vec{j}|$

Nota:

Todo vector puede expresarse en función de su vector unitario de la siguiente manera.

$\vec{a} = |\vec{a}|\vec{u}$ donde $\vec{u}$; vector unitario en dirección de $\vec{a}$

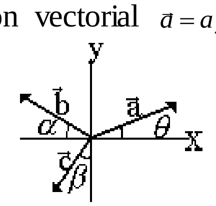
DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR EN EL PLANO



Módulo $a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}$

Dirección $\tan\theta = \dfrac{a_y}{a_x}$

Expresión vectorial $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$



Suma de varios vectores

Para sumar varios vectores se encuentran las componentes en"x" y en"y", luego se suman componente a componente.

VECTORES TRIDIMENSIONALES

Consideremos el vector $\vec{a}$ en el espacio

Donde $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ son vectores unitarios

en dirección de los ejes "x" ,"y" e "z" respectivamente

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ y

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$

VECTOR UNITARIO ($\hat{U}$)

Un vector unitario no tiene dimensiones, su módulo es uno y es usado para indicar la dirección

Se **A** un vector cualquiera Nota: negrita significa vector

A = 2 **i** + 3 **j** + 4 **k**

$\hat{U}_A$ = **A** / | **A** | se lee Vector unitario de

A es igual al vector A entre el módulo de **A**

|**A** | = $\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}$ = A es el modulo del vector **A**

$\hat{\boldsymbol{U}}_A = \frac{2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}}{\sqrt{29}}$

PODUCTO ESCALAR, PUNTO Ò INTERNO

El producto escalar de dos vectores **A** y **B** se define como

A . B = A B cos θ

Producto escalar de vectores unitarios

$\hat{\imath}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.\hat{\jmath} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

$\hat{\imath}.\hat{\jmath} = \hat{\jmath}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{\imath} = 0$

Ejemplo

Hallar el producto interno de los vectores **A** y **B**

A = 2 **i** + 3 **j** + 4 **k**

B = **i** +2 **j** + 3 **k**

A . B = (2 **i** + 3 **j** + 4 **k**).(**i** +2 **j** + 3 **k**)

A . B = 2 **i . i** + 3 **j.i** + 4**k.i** + 2**i** . 2 **j** + 3**j**.2**j** + 4 **k**. 2 **j** + 2**i** . 3**k** + 3**j**.3**k** + 4**k**. 3**k**

A . B = 2 + 6 + 12 = 20

El producto escalar de dos vectores siempre resulta un número.

PRODUCTO VECTORIAL

Sea **A** y **B** dos vectores

A x B = A B sen θ

El producto de dos vectores es igual al producto de sus módulos multiplicado por el coseno del menor ángulo comprendido entre ambos.

PRODUCTO VECTORIAL DE VECTORES UNITARIOS

$\hat{\imath}.x\,\hat{\imath} = \hat{\jmath}\,x\hat{\jmath} = \hat{k}\,x\,\hat{k} = 0$

$\hat{\imath}\,x\,\hat{\jmath} = \hat{k}$, $j\,x\,\hat{\imath} = -\hat{k}$

$\hat{\jmath}\,x\,\hat{k} = \hat{\imath}$ $\widehat{k}\,x\,\hat{\jmath} = -\,\hat{\imath}$

$\widehat{k}\,x\,\hat{\imath} = \hat{\jmath}$ $\hat{\imath}\,x\,k = -\,\hat{\jmath}$

Ejemplo

Hallar el producto vectorial de los vectores **A** y **B** del ejemplo anterior

A x B = (2 **i** + 3 **j** + 4 **k**) **x (i** +2 **j** + 3 **k)**

A x B = $\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$ = $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ **i** + $\begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{matrix}$ (- **j**) + $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ **k** = (9 - 8) **i** - (6 - 4) **j** + (4 - 3) **k**

A x **B** = **i** – 2**j** + 1 **k**

El producto vectorial da como resultado siempre un vector

TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

Está definido por.

A .(B x **C)** = $\begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{bmatrix}$

|**A** .(**B** x **C**)|
Es el modulo del triple producto escalar que da como resultado el volumen de un paralelepípedo.

Sea V el volumen de un paralelepípedo cuyas aristas son los vectores **A, B, C** que se muestran en la figura 1. Donde u es un vector unitario de **B x C,** perpendicular al plano B y C, que apunta en la dirección de la altura, entonces la componente del vector A en la dirección de u , es la altura del paralelepípedo. h = **A.u**

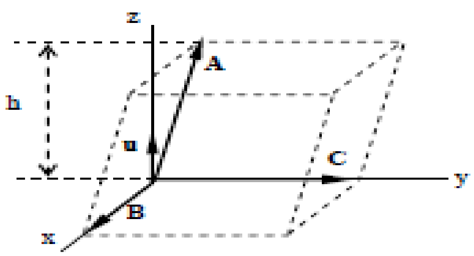


Figura 1.

TRIPLE PRODUCTO VECTORIAL

A X (**B** X **C**).

DIFERENCIACION E INTEGRACION DE FUNCIONES VECTORIALES

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \frac{d\,\mathbf{A}}{du} + \frac{d\,\mathbf{B}}{du}$$

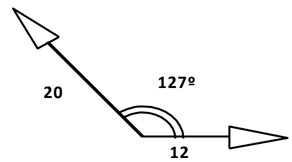
$$\int (A+B)\,du = \int (\mathbf{A}\,du) + \int (\mathbf{B}\,du)$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}) = \mathbf{A}.\frac{d\,\mathbf{B}}{du} + \frac{d\,\mathbf{A}}{du}.\mathbf{B}$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\ \mathbf{x}\ \mathbf{B}) = \mathbf{A}\ x\ \frac{d\,\mathbf{B}}{du} + \frac{d\,\mathbf{A}}{du}\ x\ \mathbf{B}$$

EJEMPLOS RESUELTOS

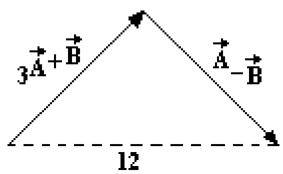
1. Determinar el módulo de la resultante en



$$|R| = \sqrt{12^2 + 20^2 + 2\ x 12 x 20 \cos(127)}$$

R = 16

1. Encontrar el módulo del vector A



Solución

|3 **A** + **B** + **A** – **B** | = 12

| 4 A | = 12

|A| = 3

2. dados los vectores A y B: hallar el producto escalar, producto vectorial , vector unitario de A , vector unitario de B . el área comprendida por los vectores A B

A = 6 **i** + 3 **j** + 10 **k**

B = 2 **i** – 5 **j** + 5 **k**

Solución:

$|A| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 10^2} = \sqrt{145}$

$\hat{\mathbf{U}}_A = \frac{6\,\boldsymbol{i}}{\sqrt{145}} + \frac{3\,\boldsymbol{j}}{\sqrt{145}} + \frac{10\,\boldsymbol{k}}{\sqrt{145}}$

$\mathbf{A}.\mathbf{B} = (6\ \mathbf{i} + 3\ \mathbf{j} + 10\ \mathbf{k}).(2\ \mathbf{i} - 5\ \mathbf{j} + 5\ \mathbf{k}) = 12 - 15 + 50 = 47$

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 3 & 10 \\ 2 & -5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -5 & 5 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}(-\mathbf{j}) + \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

A x **B** = (15 +50) **i** + (30 -20) **j** + (-30 – 6) **k** = 65 **i** + 10 **j** - 36 **k**

A x **B** = $\sqrt{65^2+10^2+36^2}$

4. Dado los vectores

A = 6 **i** + 3 **j** + 10 **k**

B = 2 **i** – 5 **j** + 5 **k**

C = 5 **i** – 2 **j** + 7 **k**

Que vector **D** proporciona los siguientes resultados

D . **A** = 20 **D**. **B** = 5 **D . i** = 10

Solución:

D = D_X **i** + D_y **j** + D_z **k**

D. A = 6 D_x + 3 D_y + 10 D_z = 20

D.B = 2 D_x – 5 D_y + 5 D_z = 5

D. i = D_x = 10

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

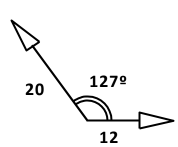
D_x = 10 D_y = - 0.77 D_z = - 3.77

D = 10 **i** - 0.77 **j** – 3.77 **k**

EJERCICIOS PRPUESTOS NIVEL BÁSICO

1. Determinar el módulo de la resultante en :

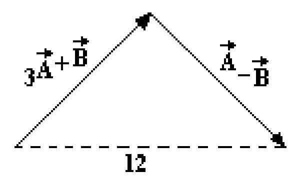
a) 15
b) 12
c) 16
d) 19
e) 18



2. El vector resultante de dos vectores tiene 15 unidades de longitud y hace un ángulo de 60º con uno de los vectores de 20 unidades de longitud, hallar la longitud del otro vector:

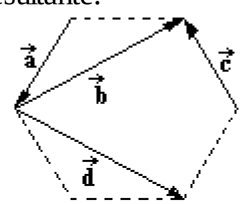
3. Encontrar el módulo del vector $\vec{A}$

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7



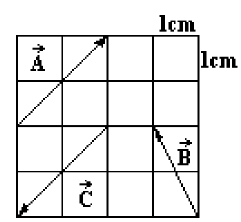
4. La figura muestra un hexágono regular de lado 1cm. Determinar el módulo del vector resultante.

a) 8cm
b) $8\sqrt{2}$ cm
c) 2cm
d) 6cm
e) 16cm



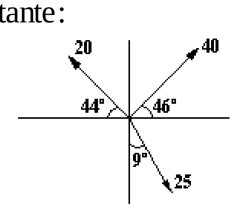
5. Hallar el vector unitario de $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

a) $\frac{(-1,2)}{\sqrt{5}}$
b) $\frac{(1,2)}{\sqrt{5}}$
c) $\frac{(-1,-2)}{\sqrt{5}}$
d) (-1, 2)



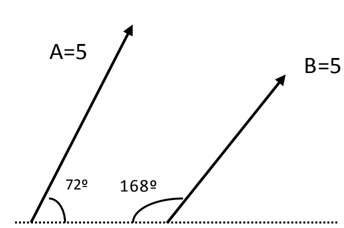
6. Dado el conjunto de vectores. hallar el módulo de la resultante:

a) 85
b) 60
c) 25
d) 35
e) 15



7. En el sistema mostrado. Hallar el módulo del vector suma o resultante

a) $4\sqrt{3}$
b) $5\sqrt{3}$
c) $6\sqrt{3}$
d) 7



8. En la figura expresar el vector $\vec{D}$ en función de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

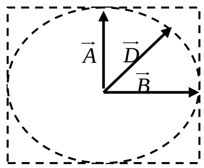
   a) $\vec{A}+\vec{B}$

   b) $\sqrt{2}\left(\vec{A}+\vec{B}\right)$

   c) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{A}+\vec{B}\right)$

   d) $\vec{A}+\frac{\vec{B}}{2}$

   e) $\sqrt{2}\left(\vec{A}-\vec{B}\right)$

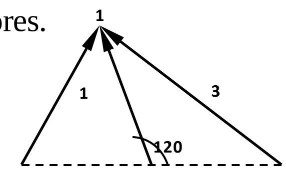


9. Tres vectores han sido colocados sobre un triángulo, como se puede ver en la figura, determine el módulo de la suma de vectores.

   a) 18

   b) $\sqrt{21}$

   c) N.A



EJERCICIOS DE NIVEL MEDIO

10. Hallar el área del paralelogramo determinado por los vectores
    A= 2**i** + 3**j** – **k** y **B**= - **i** + **j** +2 **k**
    Respuesta 9.1 unidades

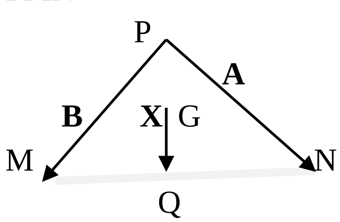
11. Hallar la distancia del punto P (4, -1 , 5) a la línea recta que paso por los puntos P_1 (-1, 2, 0) y P_2 (1,1,4)

    d = |**A**X**B**| / B Resp. 2.67

12. Demostrar que el producto triple escalar es el volumen del paralelepípedo

13. Demostrar que si $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ y $\mathbf{V}_3$ suman cero , entonces $\mathbf{V}_1$ x $\mathbf{V}_2$ = $\mathbf{V}_3$ x $\mathbf{V}_2$ = $\mathbf{V}_2$ x $\mathbf{V}_1$

14. Exprese el vector **X** en función de **A** y **B** considere G baricentro del triángulo PMN



15. Dado los vectores

    A = 6 **i** + 3 **j** + 10 **k**

    B = 2 **i** – 5 **j** + 5 **k**

    C = 5 **i** – 2 **j** + 7 **k**

    Que vector **D** proporciona los siguientes resultados

    D . A = 20 **D. B** = 5 **D . i** = 10

16. Demostrar que si las magnitudes de la suma y la diferencia de dos vectores son iguales, entonces los vectores son perpendiculares.

17. Demostrar que si dos vectores tienen la misma magnitud V y hacen un angulo θ, su suma tiene una magnitud S= 2Vcos(θ/2), y su diferencia D = 2V sen(θ/2).

18. Hallar el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son **A B, C : A= 5i +4j -3k ; B= 8i – 2j +k ; C= i + j -3 k**

19. En la figura se muestra un paralelepípedo de aristas 4m, 6m y 12 m; ubicados a 10 metros del origen de coordenadas, hallar el vector $\mathbf{V_1}$ sabiendo que su módulo es 10.5m , y $\mathbf{V_2}$ cuyo módulo es 9 m

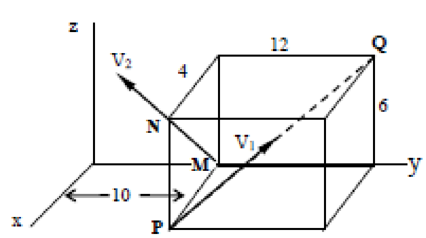


Figura 1.

Resp. $\mathbf{V_1 = -3\,i + 9\,j + 4.5\,k}$; $\mathbf{V_2 = 5i + 7.5\,k}$

20. hallar la ecuacion del plano determinada por los puntos P_1 (3,1,1) ; P_2(1,2,3); P_3 (2,2,5) .

Sugerencia. utilice tres vectores formados por las diferencias $\mathbf{r - r_1}$, r2-r1,r3-r1

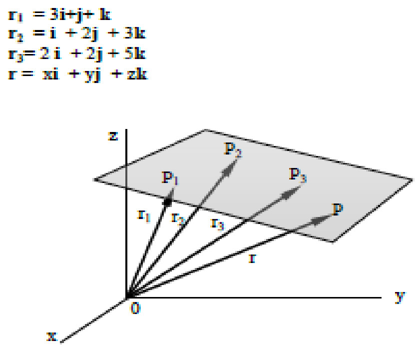


Figura1.

RESP P : 2X + 6Y –Z = 11

21. hallar el valor de m de modo que **A= 3i + (m-5) j + 4 k y B = -6 i – m j + 3 k**, sean perpendiculares.