CICLO : 2013 - 0

CURSO : FÍSICA

PROFESOR : R. Zavala Sánchez – J. Tiravantti Constantino

SEMANA : 01 - 02

MEDICION Y SISTEMAS DE UNIDADES - VECTORES

01 MEDICION Y ANALISIS DIMENSIONAL

La física es una ciencia experimental, que estudia los componentes de la materia y sus interacciones mutuas. Los experimentos requieren mediciones cuyos resultados suelen describirse con números. Cualquier número empleado para describir cuantitativamente un fenómeno físico se denomina cantidad física

Algunas cantidades físicas son tan básicas que sólo podemos definirlas, describiendo la forma de medirlas, es decir con una **definición operacional,** por ejemplo medir una distancia con una regla o un intervalo de tiempo con un cronómetro. En otros casos definimos una cantidad describiendo la forma de calcularla a partir de otras cantidades medibles, como en el caso de la velocidad media que se define como el cociente entre la distancia recorrida por un móvil entre el tiempo empleado

Medir es asignar un número a una propiedad o atributo de la materia. Por lo general se hace comparando la cantidad a medir con algún estándar o patrón de la misma naturaleza arbitrariamente elegido como unidad de esta cantidad. Por ejemplo la longitud de una mesa se mide comparándola con el metro o regla que lleva una escala graduada previamente y establecida por comparación con el metro internacional. Las dimensiones lineales de la mesa se pueden expresar como múltiplos (aunque no necesariamente enteros) del nuevo patrón. Luego si la longitud de la mesa es 2,45 m, queremos decir que es 2,45 veces mas largo que una regla de medir, que por definición tiene 1 m de largo. Este estándar define una unidad de la cantidad. El metro es la unidad de distancia y el segundo la unidad de tiempo. Al describir una cantidad física con un número, siempre debemos especificar, la unidad empleada. **Describir una distancia como “2,45” no significa nada**.

Las mediciones exactas y fiables exigen unidades inmutables que los observadores puedan reproducir en distintos lugares. El sistema de unidades empleado por los científicos e ingenieros, se denomina "sistema métrico" pero desde 1960 su nombre oficial es **Sistema Internacional de unidades** o **SI**

Las definiciones de las unidades básicas del sistema métrico ha evolucionado con los años. Cuando en 1791, la Academia Francesa de Ciencias estableció el sistema métrico, el metro se definió como una diez millonésima parte de la distancia entre el Polo Norte y el Ecuador. El segundo se definió como el tiempo que tarda el péndulo de un metro de largo en oscilar de un lado a otro. Estas definiciones eran poco prácticas y difíciles de duplicar con precisión, por lo que se han sustituido por otras mas refinadas por acuerdo internacional.

Los números que expresan las dimensiones lineales del objeto no son simples valores numéricos, sino cantidades dimensionales, cuya dimensión es la longitud y se expresan en metros, pies, pulgadas o cualquier otra unidad estándar de longitud que se elija.

Las cantidades que se estudian en Física son generalmente cantidades dimensionales, que a pesar de su gran número, siempre se puede expresar la unidad de cualquier cantidad física en función de cierto número de unidades fundamentales adecuadamente elegidas. En cualquier caso, lo importante es que el conjunto elegido comprenda el número suficiente de cantidades físicas independientes que reciben el nombre de dimensiones. Una opción es la siguiente elección: **longitud** L, **masa** M, **tiempo** T y **carga eléctrica** Q. Si el campo de estudio se restringe sólo a la mecánica clásica, bastan las tres primeras: longitud masa y tiempo. Nótese que la elección de las 4 unidades fundamentales no es única, también puede elegirse a la **longitud** L, **fuerza** F, **tiempo** T y **carga eléctrica** Q

Con la primera elección (L, M, T y Q), cualquier cantidad física (C), queda expresada dimensionalmente de la siguiente manera:

$$C = L^{p} M^{q} T^{r} Q^{s} \qquad (0.1)$$

donde p, q, r y s son números enteros o fraccionarios cuyo valor depende de la ecuación de definición de la cantidad física C.

EJEMPLO 01: La velocidad se define como la razón entre la distancia (longitud) y el (tiempo):

$$v = \frac{d}{t}, \quad d \rightarrow L\,; \quad t \rightarrow T$$

por consiguiente la expresión dimensional (o dimensión) de la velocidad es:

$$v = \frac{L}{T}\,; \qquad v = LT^{-1} \qquad (0.2)$$

En esta expresión no figura la masa M ni la carga eléctrica Q, sin embargo, podemos compatibilizar ésta expresión con (0.1) escribiendo $q = s = 0$ ya que toda cantidad con exponente cero es igual a la unidad.

Entonces:

$$v = LM^{0}T^{-1}Q^{0} \qquad (0.3)$$

EJEMPLO 02 La aceleración se define como:

$$a = \frac{v}{t}\,; \quad v \rightarrow LT^{-1}\,; \quad t \rightarrow T$$

por consiguiente su expresión dimensional es:

$$a = \frac{LT^{-1}}{T} \quad o \quad a = LT^{-2} \qquad (0.4)$$

EJEMPLO 03 La fuerza se define como $F = ma$

$m \rightarrow M\,; \quad a \rightarrow LT^{-2}$

Su ecuación dimensional es:

$F = M\,LT^{-2}$ (0.5)

EJEMPLO 04 La resistividad eléctrica (ρ) de un conductor está definida por:

$$\rho = \frac{RS}{L}$$

donde R es la resistencia, S el área de la sección y L la longitud del conductor. Su expresión dimensional es:

$\rho = L^3MT^{-1}Q^{-2}$ (06)

El estudio de las dimensiones de una ecuación se denomina **análisis dimensional** y como tal tiene diversas aplicaciones en física. Cualquier ecuación que relacione cantidades físicas debe tener dimensiones consistentes, es decir, las dimensiones de un lado de la ecuación deben ser las mismas que las del otro lado. Esto constituye una valiosa comprobación de cualquier cálculo

02 OPERACIONES CON CANTIDADES DIMENSIONALES

Las operaciones matemáticas que incluyan cantidades dimensionales se ejecutan tomando en cuenta las siguientes normas:

1) Sólo pueden sumarse o restarse cantidades que tengan las mismas dimensiones. Por consiguiente todos los términos de una ecuación dimensionalmente correcta tienen las mismas dimensiones. Se dice entonces que la ecuación es dimensionalmente homogénea.

2) Se pueden multiplicar o dividir entre sí dos cantidades dimensionales cualesquiera; la dimensión del resultado es la expresión más simple del producto o cociente de las dimensiones o factores.

3) La dimensión de una cantidad física no se altera cuando ésta se multiplica o divide por un número puro. Por ejemplo: la distancia recorrida (x) por un móvil con movimiento uniformemente acelerado está dado por:

$x = v_o t + ½at^2$

donde v_o es la velocidad inicial, "a" la aceleración y "t" el tiempo, se puede verificar que esta ecuación es dimensionalmente correcta si procedemos de la siguiente manera:

a) Reconociendo las dimensiones:

distancia (longitud) x …....…...…. L

tiempo t .....….......………….........…..T

velocidad v_o (ver 0.2) .... LT^{-1}

aceleración a (ver 0.3) ….…....... LT^{-2}

b) sustituyendo en la ecuación propuesta y aplicando la segunda norma:

$L = (LT^{-1})T + ½(LT^{-2})(T^2)$

$L = L + ½\,L$

c) al aplicar la primera y tercera normas encontramos que en el segundo miembro el número puro ½ al multiplicar a L no altera la dimensión que representa L, por tanto ½L = L y del mismo modo L + L = L Y así hallamos la siguiente identidad:

$$L \equiv L$$

EJEMPLO 05. Se encuentra que la fuerza de fricción (F) en los fluidos es directamente proporcional a la velocidad (v) del cuerpo que se mueve dentro del fluido

$F = k\,v$

Mediante el análisis dimensional, encuentre las unidades de la constante de proporcionalidad (k)

Solución. En este caso emplearemos el requisito de que las dimensiones de los dos lados de la ecuación deben coincidir, para fijar la dimensión de un factor de la ecuación. Ya hemos visto que la dimensión de la fuerza es: MLT^{-2} y la velocidad LT^{-1}; de modo que sustituyendo y simplificando encontramos que la dimensión de k es:

$$k = \frac{F}{v} = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1}$$

Luego las unidades de k se obtiene dividiendo la unidad de masa entre la unidad de tiempo, el resultado final es (kg/s)

03 SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES DE MEDIDA (**SI**)

El Sistema Internacional de Unidades de Medida llamado **SI** en todos los idiomas, fué sugerido por el físico italiano G. Giorgi tomando como base el sistema MKS racionalizado.

De acuerdo a las resoluciones de las XI, XII y XIV conferencias generales sobre pesas y medidas se adoptó y recogió el uso mundial del **SI**, con el fin de subsanar deficiencias en la representación de nuevas magnitudes físicas con el avance de la ciencia. El **SI** se basa en un conjunto de unidades consideradas convencionalmente como independientes en cuanto a sus dimensiones. En la tabla siguiente se dan las unidades de medida.

UNIDADES FUNDAMENTALES **SI**

Magnitud Física	**Nombre de la unidad**	**Símbolo**
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Corriente eléctrica	Amperio	A
Temperatura	Kelvin	K
Intensidad luminosa	Candela	cd
Cantidad de sustancia	Mol	mol

UNIDADES COMPLEMENTARIAS

Angulo plano	Radián	rad
Angulo sólido	Estereorradián	sr

LOS VEINTE PREFIJOS DEL **SI**

Factor	Prefijo	Símbolo	Factor	Prefijo	Símbolo
10^{-1}	deci	d	10	deca	da
10^{-2}	centi	c	10^2	hecto	h

10^{-3}	mili	m	10^{3}	kilo	k
10^{-6}	micro	μ	10^{6}	mega	M
10^{-9}	nano	n	10^{9}	giga	G
10^{-12}	pico	p	10^{12}	tera	T
10^{-15}	femto	f	10^{15}	peta	P
10^{-18}	atto	a	10^{18}	exa	E
10^{-21}	zepto	z	10^{21}	zetta	Z
10^{-24}	yocto	y	10^{24}	yotta	Y

04 EL SISTEMA BRITANICO

Este sistema se usa en Estados Unidos y unos pocos países, aunque en casi todos está siendo sustituido por el **SI**. Actualmente las unidades británicas se definen exactamente en términos de las del **SI**, como sigue:

Longitud: 1 pulgada = 2,54 cm

Fuerza: 1 libra = 4,448221615260 newtons

Tiempo: 1 segundo (**SI**)

En física las unidades británicas sólo se usan en mecánica y termodinámica, no existe un sistema británico de unidades eléctricas.

05 DEFINICION DE LAS UNIDADES **SI** FUNDAMENTALES

Metro. Esta longitud actualmente se define como la longitud del trayecto recorrido en el vacío por un rayo de luz en un tiempo 1/299792458 segundos. Sin embargo excepto en las mediciones muy precisas, se usa el antiguo patrón (distancia entre dos marcas de una barra de platino-iridio a 0°C del Archivo Nacional de Pesas y Medidas en Francia). En el laboratorio generalmente se usa el centímetro como unidad de longitud. Para medir distancias muy pequeñas tales como los radios atómicos se emplea el picómetro (pm)

1 pm = 10^{-12} m = 10^{-10} cm

En la bibliografía antigua se usa el AngstronÅ para la escala interatómica:

1 Å = 10^{-8} cm = 10^{-10} m = 100 pm

Kilogramo. Esta unidad de masa se definió originalmente como la masa de 1000 cc.de agua a 4°C. Una cantidad de platino con esta masa se guardó en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas. Más tarde se descubrió, mediante medidas más precisas que esta pieza de platino tan rigurosamente construida no tenía la misma masa que 1000 c.c. de agua, pero se tomó la decisión de mantenerlo para evitar cambiar la masa patrón de todo el mundo.

Segundo. Esta unidad de tiempo fué formalmente definida como la 1/86400 ava parte del día solar medio. Ahora se define como la duración de 9 192 631 770 periodos de la línea de microonda del cesio 133, con una amplitud de onda de 3,26 cm.

Amperio. El amperio se define como la cantidad de corriente eléctrica que fluye a través de dos alambres rectilíneos y paralelos de sección ínfima, separados a un metro de distancia y que produce entre ambos alambres una fuerza (magnética) de 2×10^{-7} N por metro de longitud.

La unidad **SI** de carga eléctrica es el **Coulombio**(C), igual al amperio × segundo (1 C = 1A × 1s) La unidad de carga eléctrica que se usa generalmente en las discusiones atómicas es la unidad electrostática, definida como la fuerza electrostática entre dos unidades que están separadas por un metro y tiene la fuerza de un Newton.

Candela. La candela se define como la intensidad luminosa por 1/60000 ava parte de una cavidad de 1 metro cuadrado de platino radiante a la temperatura de fusión (2042 K). La unidad **SI** del flujo de luz se llama **Lumen** (Lm). Una fuente que tiene una intensidad de una candela irradia un flujo de luz en todas las direcciones de 40 lúmenes, Un foco de luz de 100 Watts emite cerca de 1700 lúmenes.

Kelvin. La escala de temperatura **SI** es la escala Kelvin, establecida con referencia al punto triple del agua que es la temperatura a la cual coexisten en equilibrio térmico las tres fases del agua: hielo, agua líquida y vapor de agua. A esta temperatura se le asigna arbitrariamente el valor de 273,16 K. La unidad de temperatura en esta escala es el Kelvin definida como la 1/273,16 ava parte de la temperatura del punto triple del agua En esta escala el punto de ebullición del agua al nivel del mar es 373,16 K

Mol. Es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas cantidades elementales como átomos existen en 0,012 kg de átomos de carbono 12

06 NOTACION CIENTIFICA

Uno de los lenguajes de la física y la ingeniería es el de los números. Es muy grande la variedad de números que se encuentran en la descripción del mundo físico, así por ejemplo en astronomía las dimensiones y masas de los cuerpos se representan con números muy grandes muchos de los cuales tienen alrededor de 30 cifras, en cambio en el micromundo se usan números que tienen alrededor de treinta cifras decimales. Resulta muy incómodo tener que escribir tantas cifras, en cambio la notación científica abrevia la escritura de dichos números utilizando las potencias de 10. Así por ejemplo la masa de la Tierra se escribe $5{,}98\times10^{24}$ kg y el diámetro del protón 10^{-15} m. En esta notación, 10^{3} significa 1000 y 10^{-4} quiere decir 0,0001.

Una gran ventaja de la notación científica es que la multiplicación y la división se pueden ejecutar sumando y restando exponentes de 10. El producto 1000×100 = 100 000 se puede escribir como $10^3\times10^2 = 10^{3+2} = 10^5$. Cuando tenemos que dividir, sólo necesitamos cambiar el signo de un exponente y emplear las reglas de la multiplicación.

EJEMPLO 06: Hallar el resultado de

1) $\dfrac{5{,}0\times10^{-3}}{2{,}5\times10^{-4}} = \dfrac{5{,}0}{2{,}5}\times10^{-3}\times10^{+4} = 2\times10^{+1} = 20$

2) (1989345)(0,00058639) = $(1{,}99\times10^{6})(5{,}86\times10^{-4})$

$= 1{,}17\times10^3$

07. EXACTITUD Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

En la ciencia, las mediciones, en el mejor de los casos, son sólo aproximaciones. Una incertidumbre es una indicación de la exactitud de la medición. La incertidumbre depende de la exactitud del instrumento con el que se mide, y de que tan bien se puede leer dicho instrumento. Por ejemplo si al medir el ancho de una página de papel con una regla graduada en milímetros obtenemos 19,6 cm con una incertidumbre de 1 mm (0,1 cm), lo correcto es decir que el ancho es 19,6 ± 0,1 cm. El signo ± quiere decir "más o menos". En este caso se dice que 19,6 es el valor central y 0,1 cm la incertidumbre que rodea al valor central. En este caso, la base de la incertidumbre, reside en la confianza que podamos tener en nuestros ojos para interpretar la regla, o con el cuidado con el que se grabaron las marcas de la regla. Con frecuencia se emplea el término de incertidumbre porcentual como medida de la relación de incertidumbre y el valor central de una cantidad. La incertidumbre porcentual, o porcentaje de incertidumbre, es esta relación multiplicada por 100. En nuestra medición del papel, la incertidumbre porcentual fue entonces:

$$e\% = \frac{\Delta a}{a} = 100\,\frac{0{,}1}{19{,}6} = 0{,}51\%$$

Podemos calcular el área del papel midiendo la longitud y multiplicándola por el ancho anterior. Supongamos que la longitud del papel es 30,9±0,1 cm . El porcentaje de incertidumbre de la longitud es 0,32%. El área está dado por (19,6 cm)×(30,9 cm) = 606 cm^2. Como el ancho y la longitud tienen incertidumbre en sus mediciones, también el área tendrá cierta incertidumbre, que podemos calcular del siguiente modo: Por lo general cuando las incertidumbres porcentuales no son demasiado grandes, se suman, si estamos multiplicando o dividiendo los valores centrales. Así en el ejemplo propuesto, la incertidumbre total del área es 0,51% + 0,32 % = 0,83%. Esto quiere decir que hay una incertidumbre de 0,0083(606 cm^2) = 5 cm^2 y que el área del papel es 606 cm^2

Cifras significativas.

Las cantidades físicas nunca se conocen con exactitud, a menos que sean sólo definiciones. Al asignar un número a una cantidad, ya suponemos un determinado grado de incertidumbre. Esa incertidumbre se indica con el número de dígitos que se usa para expresar la cantidad y la podemos determinar si comprendemos que hay implícito un redondeo. Así al decir que determinado objeto tiene 2,00 m de longitud, lo que en realidad queremos expresar es que su longitud está entre 1,95 y 2,05 m. Si hubiéramos querido decir que la longitud está entre 1,995 m y 2,005 m, escribiríamos la longitud como 2,000 m. En el primer caso, el número de cifras significativas es 3, en el segundo, es 4. Se puede decir que una hoja de papel cuya área es 606 ± 5 cm^2 tiene 606 cm^2. Esta última cantidad tiene 3 cifras significativas, lo cual, quiere decir que el área queda entre 601 cm^2 y 611 cm^2. Cuando decimos que el papel tiene un área de 606,0 cm^2 estamos empleando 4 cifras significativas, el área está entre 605,5 cm^2 y 606,5 cm^2.

Los ceros que sólo se usen para determinar la posición del punto decimal no son parte del número de cifras significativas. Así por ejemplo 0,00045 tiene 2 cifras significativas y no 6. En el ejemplo de la masa de la Tierra 5,98×10^{24} kg, indicamos sin lugar a confusión, que conocemos la masa de la Tierra con 3 cifras significativas; si la conociéramos sólo con 2, citaríamos: 6,0×10^{24} kg. En conclusión, en operaciones con cantidades físicas no se debe llevar a cabo un cálculo con más cifras significativas que las que se conocen en la parte de los datos que tiene el menor número de cifras significativas. Por ejemplo al dividir 3,0 entre 11,0 en la calculadora, podrá tener la intención de escribir el resultado como 0,2727272727. Pero sólo debe citar el resultado con dos cifras significativas, 0,27 cuando mucho. El dato menos conocido es el que determina en mayor grado la exactitud del resultado final, porque en ese dato interviene el mayor error porcentual. Como de manera muy aproximada, los errores porcentuales, son aditivos, el mayor error porcentual es el que domina en el resultado final.

Equivalencia de algunas unidades

LONGITUD

1 m = 3,281 ft = 39,37 in

1 in = 2,54 cm

1 yd = 91,44 cm

1 ft = 30,48 cm

MASA

1 kg = 1000 g = 0,0685 slug

1slug (geolibra) = 32,16lb(masa)

= 14,59 kg = 1488 utm

1 uma(unidad de masa atómica) = 1,6601×10^{-27} kg

FUERZA

1 N (newton) = 10^5 dinas = 0,2248 lb

1lb = 4,45 N

VELOCIDAD

1 km/h = 0,2778 m/s = 0,6214 mi/h

1 pie/s = 0,3048 m/s = 0,6018 mi/h

1 mi/h = 1,467 pie/s = 0,447 m/s =1,609 km/h

1nudo (milla náutica/hora) = 0,5144 m/s

= 1,852 km/h

VELOCIDAD ANGULAR

1 rad/s = $\frac{1}{2\pi}$ rev / s = 60(2π) rpm

1 rev/s = 2π rad/s = 60 rpm

1 rpm (rev/min) = 2π/60 rad/s

TRABAJO, ENERGIA

1 J (joule) = 1 N.m = 10^7 erg = 2,389 $\times 10^{-4}$ kcal

= 9,481 $\times 10^{-4}$Btu

1 pie.lib = 1,356 J

1 kcal = 1000 cal = 4186 J = 3,968 Btu

1 Btu (British thermal unit) = 1055 J

= 778 pie.lib = 0,252 kcal

1 kWh (kilowat-hora) = $3,6\times 10^6$ J

= 860,1 kcal = 3413 Btu

1eV (electronvoltio) = $1,602\times 10^{-19}$ J

CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. ¿Por qué es más conveniente medir la distancia en centímetros, metros y kilómetros, que medirla en pulgadas, pies, yardas y millas?
2. El pulso humano y la oscilación de un péndulo, son unidades posibles de tiempo. ¿Son ideales?
3. En un frasco de diez mil gomitas (esferillas de jalea), el 25 % de ellas son verdes. Exprese, en notación científica, el número de gomitas verde.
4. ¿Cuál es el resultado de: a) 10^{-3} por 10^3 b) $10^3/10^{-3}$
5. Calcule la raíz cúbica de 10^{21} y también el cuadrado del número que resulte.
6. La altura de un jugador de baloncesto es 6 pies 11 pulgadas. Exprésela en metros y centímetros
7. La aceleración debida a la gravedad, g es 9,80 m/s^2 en el **SI**. Conviértala al sistema inglés, con la longitud en pies en lugar de metros.
8. El valor de la constante de gravitación universal G, es: $6,67\times 10^{-11}$ m^3.s^{-2}.kg^{-1}. ¿Cuál es su valor en cm^3.s^{-2}.g^{-1} ?
9. El radio de la Tierra es $6,4\times 10^6$ m y su masa es $6,0\times 10^{24}$ kg. Hallar su densidad
10. Una estrella de neutrones tiene 10 km de radio y $4,0\times 10^{30}$ kg de masa. ¿Cuál es densidad, en toneladas por cm^3 ?
11. La energía cinética de una pelota de fútbol está expresada por $mv^2/2 = p^2/2m$, en la que m es su masa y v su velocidad. Esta ecuación se usa para definir, p, la cantidad de movimiento de la pelota. Con análisis dimensional determine las dimensiones de la cantidad de movimiento
12. Una de los resultados más famosos que obtuvo Einstein se encuentra en la fórmula $E = mc^2$, en la que E es contenido de energía de la masa m y c es la velocidad de la luz. ¿Cuáles son las dimensiones de E?
13. Una longitud L que se maneja en física cuántica está definida por la fórmula L = h/mc, en la cual m es la masa del electrón, c la velocidad de la luz y h una constante denominada constante de Planck. ¿Cuáles son las dimensiones de h?
14. Una buena aproximación de π es π = 22/7. ¿Qué error porcentual tiene este resultado? ¿En cuánto es mejor (o peor) la aproximación π = 355/113 ?
15. La fuerza F que obra sobre una masa que se mueve a una velocidad v por una trayectoria circular de radio r tiene como magnitud $F = mv^2/r$. Se mide la masa y el resultado es 0,00535 kg, el radio es 0,3 m y la velocidad 1,1 m/s. Encontrar F. Tenga cuidado con el número de cifras significativas
16. Una caja rectangular de ancho w = (1,25 ± 0,03) m, largo ℓ = (0,5 ± 0,1) m y alto h = (0,0137 ± 0,0028) m ¿Cuál es el volumen con el número apropiado de cifras significativas y con incertidumbre?
17. Cuando dos cantidades q_1 y q_2, tienen errores fraccionarios P_1 y P_2 (el error fraccionario es 1/100 del error porcentual), respectivamente, entonces el producto de esas dos cantidades tiene la forma: $q_1(1 \pm P_1)q_2(1 \pm P_2) = q_1q_2(1 \pm P_1 \pm P_2 \pm P_1P_2)$ Cuando los errores fraccionarios son mucho menores que 1, el término P_1P_2, es mucho menor que la suma de P_1+P_2 y el error fraccionario del producto q_1q_2 es la suma de los errores fraccionarios de q_1 y q_2 a) Demuestre que esta afirmación es correcta evaluando los errores fraccionarios importantes cuando P_1 = 0,1 y P_2 = 0,05 b) Demuestre que el mismo resultado es válido cuando las cantidades q_1 y q_2, se dividen en lugar de multiplicarse. Para demostrar este resultado tenga en cuenta que, como arriba, un error se debe tomar siempre como positivo
18. El Sol está a 93 millones de millas de la Tierra ¿Cuál es su diámetro si una moneda de 10 céntimos sujeta entre los dedos y con el brazo extendido cubre casi exactamente el Sol?
19. La masa de un átomo de hidrógeno es $1,6\times 10^{-27}$ kg. Como la masa del Sol es 2×10^{30} kg. ¿Cuántos átomos de hidrógeno tendría, si sólo estuviera compuesto de este elemento?. En realidad contiene un 70% de hidrógeno y 30% de Helio en masa y la masa del átomo de helio es $6,4\times 10^{-27}$. ¿Cuántos átomos de hidrógeno tiene el Sol?
20. Con los datos del radio de la Tierra igual a $6,4\times 10^6$ m y de la distancia promedio al Sol igual a $1,5\times 10^8$ km. ¿Qué fracción de la radiación solar llega a la Tierra?
21. Una aeronave viaja a la velocidad de 420 millas por hora. ¿Cuál es la velocidad en km por hora, en m/s y en pies por segundo?
22. Un cilindro circular recto tiene un diámetro de 8,4 pulgadas y una altura de 12,7 pulgadas. ¿Cuál es el volumen de este cilindro en pies cúbicos?
23. Hay $2,0\times 10^{23}$ moléculas de H_2O en 6 g de agua. ¿Cuál es la masa de una molécula de agua?. Dar la respuesta en gramos y picogramos, usando notación científica.
24. La masa de un átomo de uranio es de $4,0\times 10^{-26}$ kg ¿Cuántos átomos de uranio hay en 12 gramos de uranio puro?
25. La velocidad del sonido en el aire es de 330 m/s ¿Cuál es la velocidad de un avión que vuela al doble de la velocidad del sonido. Exprese su resultado en km por hora y en millas por hora.
26. Demuestre que el producto de masa, velocidad y aceleración tiene las unidades de potencia.
27. Si se amarra una piedra con una cuerda y se gira en círculo, la fuerza con la que la cuerda jala la mano depende de la masa de la piedra. ¿Cuál debe ser la combinación de esas tres cantidades en una ecuación para la fuerza?

28. La ecuación de Bernoulli de los fluidos en movimiento se expresa asi:

$p + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante}$

donde, p es la presión, ρ, su densidad y g la aceleración debida a la gravedad, h la altura del fluido sobre el piso y v es la velocidad del fluido. Demuestre que la expresión anterior es dimensionalmente. homogénea

29. Los astrónomos expresan las distancias con alguna de las siguientes unidades: (UA) es la distancia media entre el Sol y la Tierra ($1{,}5\times10^{11}$ m); un “año luz”, ($a\ell$.) es la distancia que recorre la luz en un año en el vacío; un “parsec” es la distancia a la cual 1UA subtiende un ángulo de 1 segundo de arco. La velocidad de la luz en el vacío es 3×10^8 m/s.

   a) Exprese un año luz en metros, kilómetros y millas.
   b) Exprese el parsec en años luz y en unidades astronómicas (UA)

30. Calcule las siguientes expresiones:

   a. $\dfrac{(4{,}5\times10^{-5})(0{,}0000068)}{1{,}6\times10^{-14}}$

   b. $(12{,}8)(8{,}2\times10^{7})(3{,}8\times10^{-9}) - 1{,}07$

   c. $\dfrac{(63\times10^{-4})^3(0{,}88\times10^{7})2}{(4{,}9\times10^{13})^{1/2}}$

   d. $\dfrac{(6{,}42\times10^{-36})^{1/3}}{[(0{,}00068)(1{,}7\times10^{18})]^{1/2}}$

VECTORES

INTRODUCCION

En éste capítulo se dan los conocimientos básicos sobre vectores, porque su manejo se hace indispensable en el estudio de los conceptos físicos tales como velocidad, fuerza, cantidad de movimiento etc.

Su asimilación por parte del estudiante le permitirá una comprensión más clara y genérica de un determinado fenómeno y las leyes que lo gobiernan. El tratamiento vectorial en el estudio de un fenómeno físico ofrece entre otras las siguientes ventajas:

1. Simplificación de procedimientos y sintetización de las expresiones matemáticas
2. Visualización de las relaciones entre las magnitudes físicas de carácter direccional y su variación en el tiempo

1.1 CANTIDADES ESCALARES Y VECTORIALES

La Física es la ciencia que describe el universo a través de cantidades mensurables, formulando las relaciones existentes entre ellas. Estas cantidades se clasifican en **escalares y vectoriales. S**e denominan cantidades **escalares** a aquellas que quedan completamente determinadas mediante un número y una unidad de medida. El número acompañado de la unidad de medida se llama módulo. Ejemplos: 50 cm^3, 20 s, 1/4 kg, 1 g/cm^3; es decir son magnitudes escalares el volumen, tiempo, masa, densidad, etc.

Se denominan cantidades **vectoriales**, a aquellas que quedan completamente determinadas por su módulo, dirección y sentido. Por ejemplo si alguien pretende describir su desplazamiento y simplemente afirma que se desplazó 210 km en avión partiendo del aeropuerto de Huanchaco, no tenemos la menor idea acerca de su nueva posición. La información es incompleta porque son innumerables las posibles trayectorias. En cambio; si la afirmación hubiese sido "210 km al norte del aeropuerto de Huanchaco", la posición es inequívoca por la especificación de la dirección. Además del desplazamiento tenemos como ejemplos de cantidades vectoriales: **la fuerza, impulso, aceleración, velocidad, torque o momento de una fuerza, intensidad de campo eléctrico,** etc.

1.2 VECTOR

Es una cantidad que tiene módulo (o magnitud) dirección y sentido. Su representación geométrica es un segmento de recta con flecha en un extremo. El **módulo** del vector está dado por la longitud del segmento medido a escala; la **dirección** es la inclinación del vector respecto a un marco de referencia tal como un sistema de coordenadas cartesianas. Se utilizan uno o dos ángulos para especificar la dirección del vector según se encuentre en el plano o en el espacio. El **sentido** queda establecido por la flecha.

En la figura 1.1, el punto O es el origen del vector, A su extremo y la recta L su línea de acción, α es el ángulo que especifica la dirección y se mide convencionalmente en sentido antihorario empezando del lado positivo del eje X. El carácter convencional de la dirección permite referirlo a cualquiera de los semiejes rectangulares, inclusive puede referirse a otro vector.

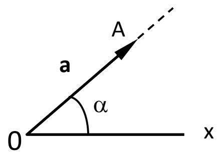


Figura 1.1 α: dirección del vector **a**

En la figura 1.2 se indica la misma dirección respecto a distintos semiejes

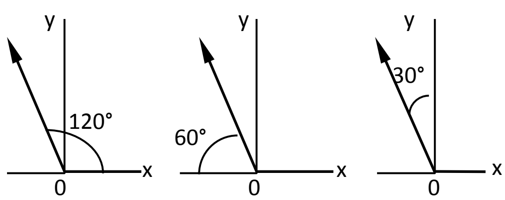


Figura 1.2 La dirección es relativa

1.3 NOTACION DE VECTORES

Se utilizan diversas notaciones para escribir los vectores así por ejemplo el vector de la figura 1.1 puede escribirse de las siguientes maneras: $\hat{a}$, $\vec{a}$, **a,** $\overrightarrow{0A}$. De idéntica manera el módulo queda representado por: a, $|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{0A}|$. En este texto adoptaremos para el vector la <u>notación en negrita</u> y para su módulo la notación usual; excepcionalmente las otras formas

Un vector en coordenadas cartesianas queda definido por dos puntos, uno de los cuales es el origen y el otro su extremo. Si el origen del vector coincide con el origen del sistema de coordenadas, un par ordenado representa un vector en el plano y una terna ordenada un vector en el espacio

vector en el plano.....: $\mathbf{a} = (a_x , a_y)$

vector en el espacio..: $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$

donde a_x, a_y, a_z se denominan componentes cartesianos del vector.

1.4 VECTOR OPUESTO

Se llama opuesto o negativo de un vector a otro vector de igual módulo pero de sentido contrario. En la Figura1.3, el opuesto del vector **A** es – **A** y viceversa el opuesto de –**A** es **A**

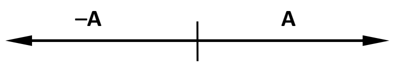


Figura 1.3 Vectores opuestos

1.5 VECTORES IGUALES

Son los vectores que tiene el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido figura 1.4

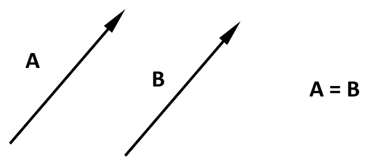


Figura .1.4 Vectores iguales

1.6 VECTORES CONCURRENTES

Son los vectores cuyas líneas de acción se intersecan en un único punto. En la figura1.5 los tres vectores son concurrentes; en cambio en la figura 1.6 los tres vectores no son concurrentes

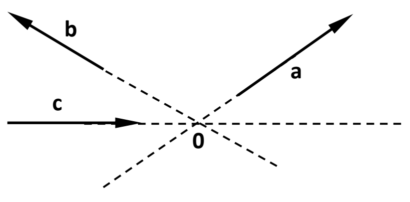


Figura 1.5 Las direcciones se cortan en 0

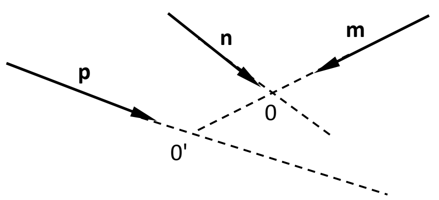


Figura 1.6 Vectores no concurrentes

1.7 VECTORES PARALELOS

Son los vectores cuyas direcciones son paralelas. Si **a** y **b** son paralelos y m es un número real, se tiene que:

$\mathbf{a} = m\,\mathbf{b}$ (1.1)

1.8 VECTOR UNITARIO

Es el vector cuyo módulo es igual a la unidad:

u es unitario si u = 1

En cualquier dirección siempre es posible encontrar un vector unitario. Así en la figura 1.7 se representan los vectores unitarios $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$,$\mathbf{u_3}$ en las direcciones L_1, L_2, L_3 respectivamente.

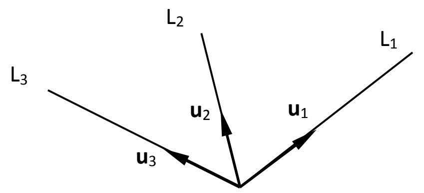


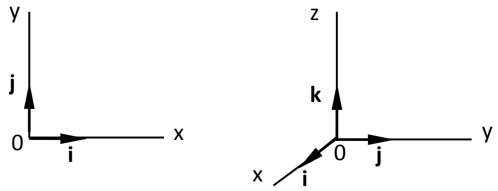
Figura 1.7 Vectores unitarios indican la dirección

En el plano cartesiano los vectores unitarios en las direcciones de los semiejes positivos X e Y se representan por **i**, **j** o su equivalente en forma de pares ordenados:

i = (1,0), **j** = (0,1)

y en el espacio tridimensional los vectores unitarios en las direcciones de los ejes son, **ij**, **k**, o en forma de ternas ordenadas:

i = (1,0,0), **j** = (0,1,0), **k** = (0,0,1) (1.2)



Plano XY Espacio XYZ

Figura 1.8 Direcciones de los ejes

Como se puede observar, los vectores unitarios **i**, **j**, **k** apuntan en la dirección positiva de los semiejes de coordenadas y por tanto son perpendiculares entre sí.

Para encontrar el vector unitario en la dirección de un vector se divide al vector entre su módulo:

$\mathbf{u} = \frac{\vec{V}}{V}$ ó $\vec{V} = \mathbf{V} = V\mathbf{u}$ (1.3)

Lo cual significa que todo vector es igual a su módulo por el vector unitario en su dirección. o también que los vectores **V** y **u** son paralelos.

1.9 ADICION DE VECTORES

Consideremos los tres puntos O, M, N y los desplazamientos entre ellos:

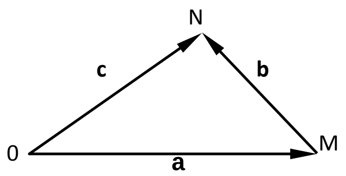


Figura 1.9 Triángulo de vectores

El desplazamiento de O a M representado por **a**, seguido del desplazamiento de M a N representado por **b**, equivale a un único desplazamiento de O a N representado por **c** el cual se le llama suma de los primeros y se escribe:

c = **a** + **b** (1.4)

este es el concepto que se tiene de suma o resultante es decir, aquel vector que equivale a la acción conjunta de los vectores que se adicionan.

Vemos en la figura 1.9, que en la disposición de los vectores con **b** a continuación de **a**, la suma **c** = **a** + **b** es aquel vector que une el origen de **a** y el extremo de **b**.

1.10 PROCEDIMIENTOS GRAFICOS PARA SUMAR VECTORES

A) **Método del paralelogramo.** Consiste en construir un paralelogramo con los vectores que se van a sumar haciendo coincidir sus orígenes, la resultante o suma queda determinada por la diagonal que une el origen común con el vértice opuesto.

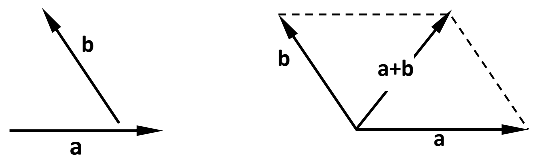


Figura.1.10 formando un paralelogramo

Debe usarse regla milimetrada para medir longitudes y transportador para medir ángulos

B) Método del polígono (para sumar varios vectores) Se dibujan los vectores unos a continuación de otros, de modo que el extremo de uno coincida con el origen del siguiente; el vector suma se obtiene uniendo el origen del primero con el extremo del último. figura.1.11

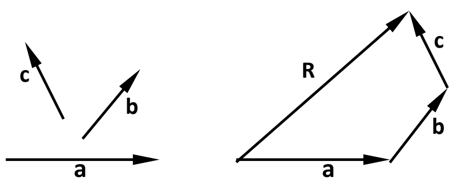


Figura 1.11 Polígono de vectores

En ciertos casos los vectores no están en el mismo plano y la figura que resulta al sumarlos es un polígono alabeado como en la figura 1.12 en la cual la suma de los vectores **a**, **b**, **c**, **d** y **e** es el vector **R** (diagonal de una cara del cubo)

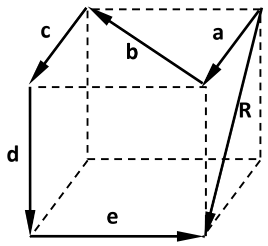


Figura 1.12 Vectores en el espacio

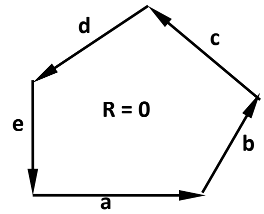


Figura 1.13 Retorno al punto de partida

Si el polígono que se obtiene con los vectores sumados es un polígono cerrado, su resultante es cero figura.1.13

1.11 PROCEDIMIENTO ANALITICO PARA SUMAR VECTORES

Consideremos los vectores **a** y **b** cuyas líneas de acción forman el ángulo θ y sea **R** su suma o resultante, esto es:

R = **a** + **b** (1.5)

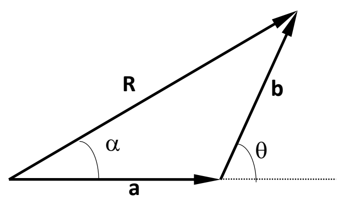


Figura 1.14 Un vector en lugar de dos

R quedará determinado cuando se conozca su módulo, dirección y sentido. El sentido está indicado obviamente por la flecha

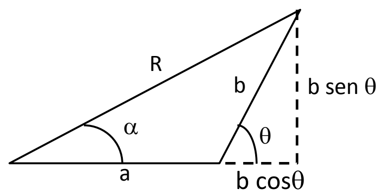


Figura 1.15 Formando el triángulo rectángulo

Para determinar el módulo observemos la figura.1.15 que el lado R se opone al ángulo (π-θ) y según la ley de los cosenos tenemos:

$R^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos(\pi-\theta)$

Pero $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ de allí que el módulo de R es

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta} \qquad (1.6)$$

la dirección de R respecto al vector **a** está dado por el ángulo α cuyo valor se obtiene aplicando la ley de los senos; esto es:

$$\frac{b}{\text{sen}\alpha} = \frac{R}{\text{sen}(\pi - \theta)} \quad \text{ó} \quad \frac{b}{\text{sen}\alpha} = \frac{R}{\text{sen}\theta}$$

De donde obtenemos la dirección de R

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{b}{R}\,\text{sen}\theta\right) \qquad (1.7)$$

Otro modo de hallar el valor del ángulo α es relacionando los catetos del triángulo rectángulo mayor de la figura 1.15:

$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{b\,\text{sen}\theta}{a + b\cos\theta}\right) \qquad (1.8)$$

Para el caso especial en que **a** es perpendicular a **b** tenemos

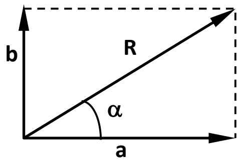


Figura 1.16 Dos vectores perpendiculares

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (1.9)$$

$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (1.10)$$

1.12 SUSTRACCION DE VECTORES

La resta de vectores se puede hacer de dos maneras: 1º) Se colocan los vectores dados en forma concurrente, entonces la diferencia es el vector que completa el triángulo apuntando hacia el minuendo. en las figuras.1.17 (1) y (2) se dan los vectores **a** y **b** y se ha indicado las diferencias: **a– b** y **b– a**

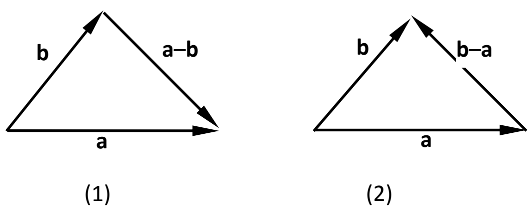


Figura 1.17 **a– b** opuesto de**b– a**

Observe que los vectores **a– b** y **b– a** son opuestos, pero sus módulos son iguales

$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = |\mathbf{b}-\mathbf{a}|$$

2º) Se suma el vector minuendo con el opuesto del vector sustraendo. La fig.1.18 muestra la resta de los mismos vectores anteriores obteniéndose el vector:

D = a + (– b)

aplicando la ley de los cosenos al triángulo de lados a, b y D obtenemos

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta} \qquad (1.11)$$

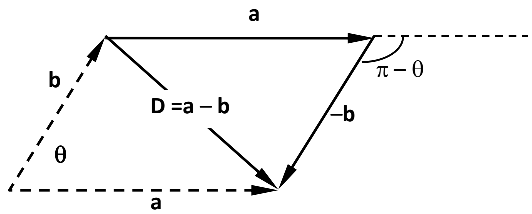


Figura 1.18 Vector diferencia: **D**= **a** –**b**

los demás elementos del vector se calculan como en la suma .

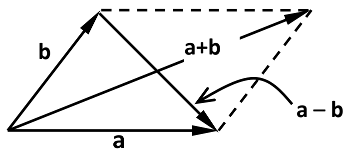


Figura 1.19 Suma y diferencia de dos vectores

En conclusión; dados dos vectores **a** y **b** con origen común (ver figura 1.19), en el paralelogramo de lados a y b, la diagonal que parte del origen común es el vector suma **a+b** y la diagonal que une los extremos es el vector diferencia **a–b** o **b–a**

EJEMPLO 1.1 Dados los vectores **a** y **b** que se muestran en la figura 1.20 cuyos módulos son 12 y 10 unidades respectivamente. Hallar: **R** = **a** + **b** y **D** = **a–b**

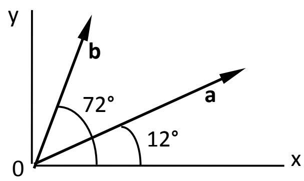


Figura 1.20 Vectores con el mismo origen

Solución Los diagramas vectoriales para la suma y la diferencia se dan en las figuras 1.21 y 1.22; donde α es la dirección del vector **R** con respecto al vector **a**

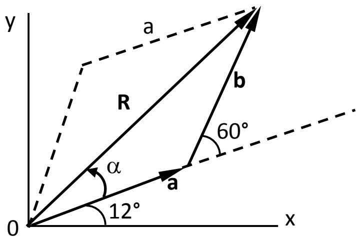


Figura 1.21 Adición

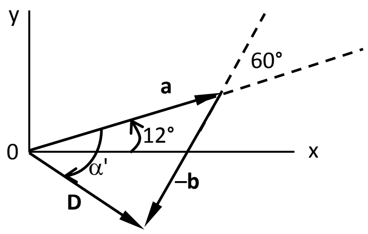


Figura 1.22 Sustracción

En la figura 1.20 vemos que el ángulo entre los vectores **a** y **b** es 60°, por tanto el módulo de **R** aplicando la ecuación (1.6) es:

$$R = \sqrt{12^2 + 10^2 + 2(12)(10)\cos 60^o}$$

= 19,1 unidades

El valor de α se determina aplicando la ecuación (1.7)

α = arc sen [(10/19,1)sen 60°] = 26,96°

La dirección de **R** respecto al eje X está dada por la suma: α_x = 26,96 + 12° = 38,96°

Módulo de D: Aplicando la ec.(1.11)

$$D = \sqrt{12^2 + 10^2 - 2(12)(10)\cos 60^o}$$

D = 11,13 unidades

Dirección de **D** respecto al vector **a**: en el triángulo formado por **a** , **D** y **–b**

$$\frac{b}{\text{sen}\alpha'} = \frac{D}{\text{sen}\theta}$$

De donde el valor de α' está dado por:

$$\alpha' = \text{arcsen}\left(\frac{b}{D}\text{sen}\theta\right)$$

$$\alpha' = \text{arcsen}\left(\frac{10}{11{,}13}\text{sen}60^o\right) = 51°$$

Obsérvese que este ángulo es negativo, pues la posición del vector **D** con respecto al vector **a** se encuentra con una rotación de 51° en el sentido de las manecillas del reloj luego la dirección respecto al eje X está dada por:

α'_x = – 51° + 12° = – 39 °

este ángulo medido a partir del semieje positivo de las x en sentido antihorario es :

α'_x = –39° + 360° = 321°

1.13 COMPONENTES RECTANGULARES DE UN VECTOR

Cualquier vector **a**, puede considerarse como la suma de dos o más vectores. A cualquier conjunto de vectores que al sumarse dan **a** como resultado, se llaman componentes de **a** Los componentes más importantes por su empleo frecuente son los rectangulares es decir aquellos que permiten expresar al vector dado como la suma de otros vectores mutuamente perpendiculares. Estos vectores en el plano son dos y en el espacio tres

En el plano.: Los vectores a_x y a_y mostrados en la siguiente figura son las componentes

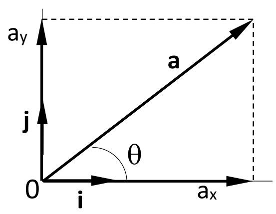


Figura 1.23 Componentes en un plano

rectangulares del vector **a** en la dirección de los ejes X e Y. a_x y a_y son los catetos del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es 'a' verificándose las ecuaciones escalares:

$a_x = a \cos\theta$, $a_y = a \text{ sen } \theta$ (1.12)

y según el teorema de Pitágoras el módulo del vector **a** es :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad (1.13)$$

así mismo tenemos la ecuación vectorial

$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$ ó

$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$;

$\mathbf{a} = (a_x , a_y)$ (1.14)

y utilizando las expresiones de a_x y a_y dadas en (1.12) obtenemos

$\mathbf{a} = (a \cos\theta)\ \mathbf{i} + (a \text{ sen } \theta)\mathbf{j}$

$\mathbf{a} = a(\cos\theta , \text{sen } \theta)$ (1.15)

ésta relación nos permite expresar al vector unitario en la dirección de **a** en la siguiente forma:

$$\mathbf{u} = \frac{\vec{a}}{a} = (\cos\theta , \text{sen } \theta) \qquad (1.16)$$

Si en la expresión anterior se hace variar el ángulo en 90° obtenemos otro vector unitario $\mathbf{u}_\theta$perpendicular al primero es decir se ha generado otro vector unitario por una rotación antihoraria de 90°

$\mathbf{u}_\theta$ = (cos (θ + 90°), sen (θ + 90°))

$\mathbf{u}_\theta$ = (–senθ , cosθ) (1.17)

En el espacio: la especificación de la dirección de un vector requiere de la definición de los ángulos y cosenos directores de un vector. En la figura 1.24 se muestra al vector **a** en el espacio con sus componentes a_x, a_y, a_z en las direcciones de los ejes X, Y, Z respectivamente. Los ángulos α, β, γ que el vector **a** forma con los ejes son los **ángulos directores** del vector y sus cosenos respectivos se denominan **cosenos directores**

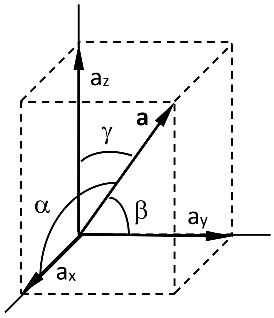


Figura 1.24 Componentes en el espacio

$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}$; $\cos\beta = \frac{a_y}{a}$; $\cos\gamma = \frac{a_z}{a}$ (1.18)

$a_x = a\cos\alpha$, $a_y = a\cos\beta$, $a_z = a\cos\gamma$ (1.19)

En el paralelepípedo trirrectángulo de la figura 1.24, la diagonal principal y sus aristas están relacionadas por:

$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ (1.20)

luego, el módulo del vector $\vec{a}$ está dado por:

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (1.21)

reemplazando en 1.20 las componentes dadas en 1.19 se obtiene:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (1.22)

así mismo tenemos :

$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$

$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$

$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$

con las ecuaciones 1.19 la expresión vectorial anterior es:

$\mathbf{a} = (a\cos\alpha)\mathbf{i} + (a\cos\beta)\mathbf{j} + (a\cos\gamma)\mathbf{k}$ (1.23)

Luego el vector unitario en la dirección de **a** es

$\mathbf{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ (1.24)

donde el valor de los ángulos directores están comprendidos entre 0 y 180°

$0 \leq \alpha,\ \beta,\ \gamma < 180°$

EJEMPLO 1.2 En la figura 1.23 hállese las componentes a_x y a_y si el módulo de **a** es 10 m y θ = 60°

Solución Con las ecuaciones 1.12 hallamos:

$a_x = a\cos\theta = 10\cos60° = 5$

$a_y = a.\mathrm{sen}\theta = 10\,\mathrm{sen}60° = 8{,}66$

1.14 ADICION DE VECTORES POR COMPONENTES

Este método es apropiado para sumar varios vectores ya sean coplanares o espaciales. Dados los vectores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$,......, $\mathbf{a}_n$, sus componentes rectangulares a lo largo del eje X se suman algebraicamente, cuyo resultado es:

$R_x = a_{1x} + a_{2x} + a_{3x} + ...+ a_{nx}$

análogamente los resultados a lo largo de los ejes Y y Z son:

$R_y = a_{1y} + a_{2y} + a_{3y} +..........+ a_{ny}$

$R_z = a_{1z} + a_{2z} + a_{3z} +..........+ a_{nz}$

El vector resultante está dado por :

$\mathbf{R} = R_x\,i + R_y\,j + R_z\,\mathbf{k}$

módulo $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$

cosenos directores:

$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}$; $\cos\beta = \frac{R_y}{R}$; $\cos\gamma = \frac{R_z}{R}$

EJEMPLO 1.3: Dados los vectores coplanares de 16u, 24u, 20u, 12u de longitud que forman con el eje positivo de las X los ángulos 0°, 75°, 150° y 210° respectivamente. Hallar el módulo y la dirección del vector resultante.

Solución:

a_1 = 16u , θ_1 = 0° ; a_2 = 24u , θ_2 = 75°

a_3 = 20u , θ_3 = 150° ; a_4 = 12u , θ_4=210°

Suma de componentes en X

$R_x = a_1\cos\theta_1 + a_2\cos\theta_2 + a_3\cos\theta_3 + a_4\cos\theta_4$

R_x = 16cos0°+24cos75°+20cos150°+12cos210°

R_x = –5,5 u

Suma de componentes en Y

$R_y = a_1\mathrm{sen}\,\theta_1 + a_2\mathrm{sen}\,\theta_2 + a_3\mathrm{sen}\,\theta_3 + a_4\mathrm{sen}\,\theta_4$

R_y = 16sen0°+24sen75°+20sen150°+12sen210°

R_y = 27,2 u

Resultante:........ **R** = (–5,5) **i** + (27,2) **j**

Módulo:...... ....$R = \sqrt{(-5{,}5)^2 + (27{,}2)^2}$

$R = 27{,}75$ u

Dirección:

$$tg\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{27{,}2}{-5{,}5} \quad \text{de donde } \theta = -78{,}57°$$

Puesto que la componente R_x es negativa y la componente R_y positiva el vector R se encuentra en el 2do. cuadrante y por lo tanto su dirección con respecto al semieje positivo de las X es

$\theta_x = -78{,}57° + 180° = 101{,}43°$

1.15 MULTIPLICACION DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

El producto de un vector **a** por un escalar m (número real) es otro vector m**a**, de módulo m veces el módulo de **a**, de la misma dirección; del mismo sentido o de sentido opuesto según que m sea positivo o negativo. La figura 1.25 muestra el vector **a** multiplicado por 3 y luego por –2.

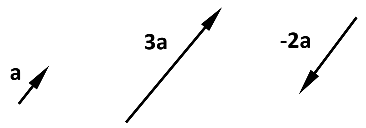


Figura 1.25 Multiplicación por un número

EJEMPLO 1.4

Si **a** = 3 **i** +2 **j**– 4 **k** y **b** = 2 **i**– 5 **j** + 6 **k**. Hallar a) 5**a**; b) – 3 **b**; c) 4 **a**– 2 **b**

Solución: multiplicando por los escalares respectivos:

a) 5**a** = 15**i** + 10**j**– 20**k**

b) –3**b** = – 6 **i** + 15 **j**–18 **k**

calculamos previamente

4**a** = 12 **i** + 8 **j**– 16 **k**

–2**b** = – 4 **i** + 10 **j**– 12 **k**

sumando verticalmente

4**a**–2**b** = (12– 4)**i** +(8+10)**j** +(–16–12)**k**

= 8 **i** + 18 **j**– 28 **k**

Si el vector se representa por una terna ordenada **a** = (a_x, a_y, a_z), la multiplicación por un escalar m se expresa así:

m**a** = (ma_x, ma_y, ma_z) (1.25)

n**b** = (nb_x, nb_y, nb_z)

Una combinación lineal de los vectores **a** y **b** queda expresada de la siguiente manera:

m**a** + n**b** = (ma_x+nb_x, ma_y+nb_y, ma_z+nb_z) (1.26)

En el ejemplo anterior el vector **V**= 4**a**– 2**b** es una combinación lineal de **a** y **b**.

1.16 VECTOR DE POSICION

Es el vector **r** que tiene como origen el origen de coordenadas rectangulares y como extremo un punto P arbitrario de coordenadas x,y,z

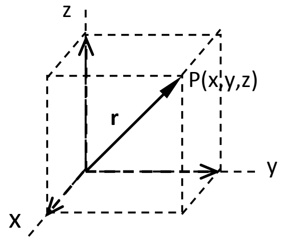


Figura 1.26 Terna ordenada ≡ vectoren el espacio

Si P es un punto móvil, el vector **r** que va del origen a la partícula sirve para determinar la posición de la partícula en cualquier instante.

Las coordenadas del punto P son las mismas componentes rectangulares de **r**. Esto es:

r = x **i** + y **j** + z **k**

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1.17 VECTOR DESPLAZAMIENTO

Se denomina desplazamiento al vector que une dos posiciones cualesquiera de una partícula en movimiento. Si tales posiciones son los puntos $P_1(x_1,y_1,z_1)$ y $P_2(x_2,y_2,z_2)$ sus respectivos vectores de posición son:

$\mathbf{r}_1 = x_1\,\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$

$\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\,\mathbf{k}$

El vector desplazamiento **d** = $\overrightarrow{P_1P_2}$ tiene como origen el punto de partida P_1 y como extremo el punto de llegada P_2, entonces se tiene que:

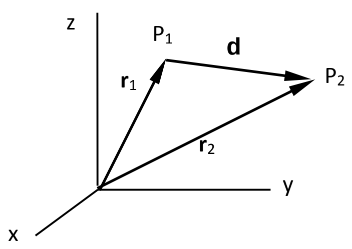


Figura 1.27 Dos puntos tomados en ciertoorden determinan un vector

$\mathbf{d} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

$\mathbf{d} = (x_2\mathbf{i} + y_2\,\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})$

d = $(x_2 - x_1)$**i** + $(y_2 - y_1)$ **j** + $(z_2 - z_1)$**k**, (1.27)

Observe que la expresión cartesiana de un vector se consigue restando de las coordenadas de su extremo, las coordenadas de su origen y escribiendo los vectores unitarios respectivos.

El módulo del vector es igual a la distancia entre los puntos P_1 y P_2:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1.28)$$

EJEMPLO 1.5: En la figura 1.28 las dimensiones del paralelepípedo son 3, 4 y 5 unidades. Encontrar:

a) La expresión del vector **T** de módulo 10 unidades que está en la diagonal BE con origen en B

b) La expresión del vector **V** de módulo 5 unidades que está en la diagonal CA con origen en C

c) Los ángulos directores de los vectores **T** y **V**

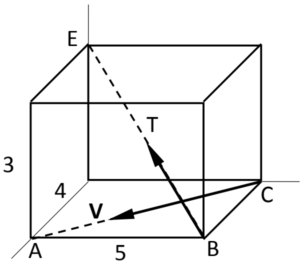


Figura 1.28 Vectores en el espacio

Solución: Las coordenadas de los vértices A,B,C y E respectivamente son: A(4,0,0), B(4,5,0), C(0,5,0), E(0,0,3) Por consiguiente los vectores $\vec{BE}$ y $\vec{CA}$ son:

$\vec{BE}$ = (0 – 4) **i** +(0 – 5) **j** + (3–0) **k**

$\vec{BE}$ = – 4 **i**– 5 **j** + 3 **k**,

$\vec{CA}$ = (4– 0) **i** +(0 – 5) **j** +(0 – 0) **k**

$\vec{CA}$ = 4 **i**– 5 **j**

a) El vector unitario $\mathbf{u_T}$ en la dirección de **T** es también vector unitario de $\vec{BE}$, según (1,3)

$$\mathbf{u_T} = \frac{\vec{BE}}{BE} = \frac{-4i - 5j + 3k}{5\sqrt{2}}$$

T = 10 $\mathbf{u_T}$ = – 4 $\sqrt{2}$ **i**– 5 $\sqrt{2}$ **j** + 3 $\sqrt{2}$ **k**

b) El vector unitario $\mathbf{u_V}$ en la dirección de **V** es también vector unitario de $\vec{CA}$

$$\mathbf{u_V} = \frac{\vec{CA}}{CA} = \frac{4i - 5j}{\sqrt{41}} = 0{,}625\mathbf{i} - 0{,}781\mathbf{j}$$

V = 5 $\mathbf{u_V}$ = 3,12**i**–3,90**j**

d) Angulos directores: Para el vector **T**

α = arc.cos (–4 $\sqrt{2}$ /10) = 124,4°

β = arc.cos (– 5 $\sqrt{2}$ /10) = 135°

γ = arc.cos (3 $\sqrt{2}$ /10) = 64,9°

Para el vector **V**

α = arc cos (0,625) = 51,34°

ß = arc cos (–0,781) = 141,34°

γ = arc cos (0,000) = 90°

1.18 PRODUCTO ESCALAR

Dados los vectores **A** y **B**; su producto escalar o producto interno simbolizado por **A.B** se define como:

A.B = AB cos θ (1.29)

donde θ es el ángulo entre los vectores; siendo $0 \leq \theta < 180°$.

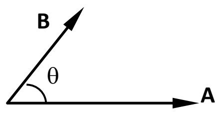


Figura.1.29 El producto escalar no es un vector

Se debe tener presente que **A.B** es una cantidad escalar y no un vector

EJEMPLO 1.6 Si en la figura 1.29 los módulos de los vectores son A = 10 m, B =5 m y el ángulo θ = 60°. Hállese el producto escalar **A.B**

Solución Aplicando la ecuación 1.29 tenemos:

A.B = ABcosθ = (10m)(5m)cos60° = 25 m^2

Condición de perpendicularidad: Si el ángulo entre los vectores es 90°, la ecuación (1.29) se reduce a **A.B** = 0. De esto se concluye que: si dos vectores son perpendiculares, su producto escalar es cero, además, si ninguno de los vectores es nulo, se cumple la bicondición:

A $\perp$ **B.B** $\Leftrightarrow$ (1.30)

Condición de paralelismo: Si el ángulo entre los vectores es cero la ecuación (1.29) se reduce a **A.B** = AB . Esto es, cuando los vectores son paralelos su producto escalar es igual al producto de sus módulos.

A$\|$ **B.B** $\Leftrightarrow$ (1.31)

El producto escalar de un vector por sí mismo es igual al cuadrado de su módulo:

A.A $= A^2$ (1.32)

Propiedades del producto escalar :

1. **A.B** = **B.A** (conmutatividad)
2. **A.**(**B** + **C**) = **A.B** + **A.C** (distributividad)
3. Para un escalar m:

m(**A.B**) = (m **A**).**B** = **A.** (m**B**) = (**A.B**)m

Producto escalar de los vectores unitarios: aplicando la definición de producto escalar tenemos:

i . i = (1)(1)cos0° = 1; **j. j** = 1; **k.k** = 1

i . j = (1)(1)cos90° = 0; **i.k** = 0; **j.k** = 0

Producto escalar de dos vectores cuando están expresados en componentes cartesianos

Sean los vectores:**a** = a_x**i**+ a_y**j** + a_z**k**

b = b_x**i**+ b_y **j** + b_z**k**

producto escalar: **a.b** = (a_x**i** +a_y**j** +a_z **k**) **.** (b_x**i** +b_y**j** +b_z**k**)

Con el procedimiento algebraico ejecutamos la multiplicación término por término teniendo en cuenta el producto escalar de los vectores unitarios; así resulta:

a.b $= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$ (1.33)

EJEMPLO 1.7: Si **a** = 4 **i** + 5 **j**–3 **k**;

b = 3 **i** + 2 **j** + 2 **k**

a.b = (4)(3)+(5)(2)+(–3)(2) = 16

1.19 PROYECCION ORTOGONAL DE UN VECTOR SOBRE OTRO

La figura 1.30 muestra los vectores **a** y **b**. La proyección del vector **a** sobre el vector **b** es otro vector paralelo a **b** definido por la siguiente expresión:

Proy$_b$**a** = (**a.b**)$\frac{\vec{b}}{b^2}$ (1.34)

Si $\mathbf{u_b}$ es el vector unitario en la dirección de **b**, tenemos:

Proy$_b$**a** = (a.cos θ)$\mathbf{u_b}$ (1.35)

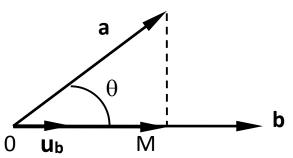


Figura 1.30 $\overrightarrow{0M}$ proyección de **a** sobre **b**

En la figura 1.30 OM = acosθ, lo cual también nos permite afirmar que dados los dos vectores, **la componente de uno de ellos en la dirección del otro**, es igual al vector que se proyecta multiplicado escalarmente por el vector unitario del otro

Comp$_b$**a** = $\frac{\mathbf{a\,.\,b}}{b}$= $\mathbf{a.u_b}$ (1.36)

Comp$_b$**a** = a cosθ (1.37)

EJEMPLO 1.8 Si en la figura 1.30 los vectores son: **a** = 9 **i**–3 **j**; **b** = 8 **i** + **j**. encuentre el vector 0M (proyección de **a** sobre **b**)

Solución: A fin de aplicar la ecuación 1.34 hallamos previamente: **a.b** y b^2

a.b = (9 **i**– 3 **j) .** (2**i** + **j**) = 9(2) –3 = 15

$b^2 = 2^2 + 1 = 5$

Luego: $\overrightarrow{0M}$ = **a.b**$\frac{\vec{b}}{b^2}$ = (15) $\frac{2i + j}{5}$

$\overrightarrow{0M}$ = 6 **i** +3 **j** =3(2**i** + **j**)

1.20 PRODUCTO VECTORIAL

Dados los vectores **A** y **B**, su producto vectorial, simbolizado por **A**×**B** es otro vector definido por:

A×**B** = AB sen θ$\vec{u}$ (1.38)

|**A**×**B**| = AB sen θ

Donde 0 ≤θ< 180° El vector **A**×**B** es perpendicular al plano determinado por **A** y **B**, su dirección indicada por el vector unitario **u** apunta en la forma que avanzaría un tornillo de rosca derecha al ser rotado de **A** hacia **B** describiendo el ángulo θ figura 1.31

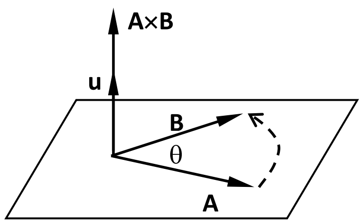


Figura 1.31 El producto vectorial es perpendicular al plano formado por **A** y **B**

Los vectores **A**, **B** y **A**×**B** forman un **triedro a derechas**. Esto es, mirando desde el interior del triedro y hacia el origen común, los tres vectores se encuentran en orden cíclico antihorario

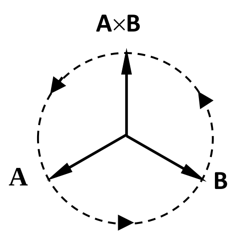


Figura 1.31.a Triedro a derechas

Condición de perpendicularidad. En la definición, ec.(1.38), si θ = 90°, entonces |**A**×**B**| = AB esto es; si dos vectores son perpendiculares, el módulo de su producto vectorial es igual al producto de sus módulos

Condición de paralelismo. En la ecuación de definición (1.38) si θ = 0°, lo que significa que: **A** || **B**, entonces al efectuar el producto vectorial resulta

$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = AB\ \mathrm{sen}(0°) = 0$ (1.39)

Note que **el producto vectorial de dos vectores paralelos es igual a cero**. Si además ninguno de los vectores es nulo, se cumple la bicondición siguiente:

A || **B** $\Leftrightarrow$ = 0 (1.40)

Propiedades del producto vectorial:

1. **A**×**B** es diferente que **B**×**A**; Es decir el producto vectorial no es conmutativo, pero se cumple que: **A**×**B** = - **B**×**A**
2. **A**× (**B** + **C**) = **A**×**B** + **A**×**C**

   (distributivo respecto a la suma)

3.- Para un m escalar se cumple

m(**A**×**B**) = (m**A**)×**B** = **A**×(m**B**) = (**A**×**B**)m

Producto vectorial de los vectores unitarios

Obsérvese que **i**× **i** = (1)(1) sen 0° = 0 y además **i** × **j** = (1)(1) sen90° **k** = **k**; de modo que podemos escribir las siguientes relaciones entre los tres vectores unitarios

i× **i** = **j**× **j** = **k**× **k** = 0

i× **j** = **k**; **j**× **k** = **i**; **k**× **i** = **j**

j× **i** = – **k**; **k**× **j** =– **i**; **i**× **k** =– **j**

Producto vectorial de dos vectores con componentes rectangulares:

Sean: **A** = A_x**i** + A_y**j** + A_z**k** y

B = B_x**i** + B_y **j** + B_z **k**

A×**B** = (A_x**i** +A_y**j** +A_z**k**)×(B_x**i** + B_y**j** + B_z**k**)

Se efectúa como si se tratara de multiplicación de dos polinomios. Para facilitar los cálculos en cada paso, debe tenerse en cuenta los resultados del producto vectorial de los vectores unitarios, así se obtiene;

$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\mathbf{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\mathbf{k}$

Este mismo resultado se puede obtener resolviendo una determinante de tercer orden cuya primera fila está formada por los vectores unitarios, la segunda fila por las componentes escalares del vector **A** y la tercera fila por las componentes escalares del vector **B**

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (1.40a)$$

EJEMPLO 1.9 Dados **A** = 5 **i** +3 **j**– 4**k** y **B** = 2 **i**– 4 **j** + 7 **k**, hállese **A**×**B**

Solución: $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix}$

A×**B** = (21–16)**i** + (–8–35) **j** + (–20–6) **k**

A×**B** = 5 **i**– 43 **j**– 26 **k**

AREA DE UN PARALELOGRAMO

En la figura 1.32 se representan los vectores **A** y **B**. Su producto vectorial **A**×**B** es perpendicular al plano del papel y saliendo de él (esto queda indicado por el punto en medio de un pequeño círculo)

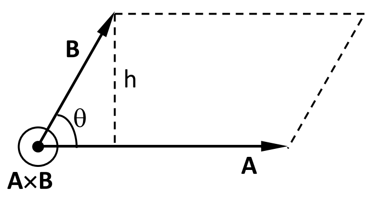


Figura 1.32 h es proyección vertical de **B**

El paralelogramo que se forma tiene como lados **A** y **B**, siendo h su altura respecto al lado **A**. El área del paralelogramo es: Ah. En la misma figura se tiene que:

h = B sen θ

|**A**×**B**| = AB sen θ = Ah .

|**A**×**B**| = área del paralelogramo (1.41)

El área de un paralelogramo formado por dos vectores es igual al módulo del producto vectorial de dichos vectores