

Notas para un curso introductorio al

MODELO ESTÁNDAR
DE PARTÍCULAS ELEMENTALES

Alejandra Melfo,
CFF-ULA, Mérida, Venezuela

Goran Senjanović
Abdus Salam ICTP, Trieste, Italia

Versión preliminar

Éstas notas son una versión preliminar del curso sobre el Modelo Estándar de Partículas Elementales, dado por Alejandra Melfo en el Departamento de Física de la Universidad de Los Andes, en el marco del Programa de Posgrados Integrados en Junio de 2004. Gran parte del material se basa en el curso impartido por Goran Senjanović en el ICTP dentro del programa *Diploma Course*. Sin embargo, el Prof. Senjanović no debe considerarse responsable de los errores que pueda tener esta versión preliminar, sino únicamente de los aciertos.

Índice general

1. Introducción	6
1.1. Partículas	6
1.2. Interacciones	7
1.3. Elementos de la descripción	9
2. Interacciones Débiles	19
2.1. Teoría V-A	22
2.2. Primer intento	25
3. Rompimiento espontáneo de simetrías	28
3.1. Simetrías Discretas	28
3.2. Caso abeliano: $U(1)$	29
3.3. Caso no-abeliano: $SO(n)$	31
3.4. Degeneración de estados	33
4. Mecanismo de Higgs	37
4.1. Caso abeliano	37
4.2. Invariancia de calibre	39
4.3. Caso no-abeliano	41
5. Mecanismo de Higgs: inclusión de fermiones	43
5.1. Caso abeliano, simetría local	44
5.2. Caso abeliano, $U(1)$ local	46
5.3. Caso no-abeliano, simetría local	48
6. $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow SU(3)_c \times U(1)_{em}$	52
6.1. Campos	52
6.2. Invariantes	54

6.3. Rompimiento de la simetría	56
6.4. Corrientes neutras	58
6.5. Masas de fermiones	59
7. Familias de fermiones	62
7.1. Caso bifamiliar	63
7.2. Mecanismo GIM	67
7.3. 3 familias	68
8. Neutrinos	72
8.1. Oscilaciones	72
8.2. Masa para los neutrinos	74

Índice de Cajas

1.1. POTENCIAL ELECTROMAGNÉTICO	15
2.1. \not{P} : DECAIMIENTO DE W	20
2.2. DECAIMIENTO DE PIONES	21
3.1. TEOREMA DE GOLDSTONE	34
5.1. INTERACCIONES CON PSEUDOESCALARES	45
5.2. INVARIANCIA DE CALIBRE-DISPERSIÓN DE FERMIONES	46
5.3. LÍMITE DE GOLDSTONE	50
6.1. BÚSQUEDA DEL HIGGS	60
7.1. VIOLACIÓN DE CP EN $K\bar{K}$	69

Capítulo 1

Introducción

1.1. Partículas

El Modelo Estándar (MS) de partículas elementales, conocido como el modelo de Glashow-Weinberg-Salam, es la teoría que describe las interacciones fuertes, electromagnéticas y débiles entre las partículas elementales, prediciendo la unificación de estas dos últimas a una escala de aproximadamente 200 GeV. Para comenzar, haremos un recuento de cuáles son estas partículas y las principales características de sus interacciones, que el modelo debe reproducir.

La materia ordinaria está constituida de lo que se conoce como la primera generación, o primera familia, de fermiones. La siguiente tabla es una lista de éstas, con sus cargas (en unidades de la del electrón) y sus masas (en MeV)

		Q (e)	M (MeV)
Quarks	u	2/3	~ 310
	d	-1/3	~ 310
Leptones	ν_e	0	~ 0
	e	-1	0.5

Todas estas partículas son fermiones, con $\text{spin}=1/2$. Los quarks tienen lo que se denomina una *carga de color*, es decir, son susceptibles a la fuerza fuerte, mientras que los leptones son neutros respecto a esta fuerza. Además de éstas, que constituyen la materia ordinaria (protones y neutrones formados por quarks, electrones, neutrinos del electrón presentes en decaimiento β), en los aceleradores de partículas y en procesos astrofísicos de alta energía

se encuentran otras dos familias de partículas. Éstas nuevas familias son una replicación de la primera, en cuanto sus componentes tienen los mismos números cuánticos, pero se diferencian en su masa, que es creciente con el *número de familia*, con la posible excepción de los neutrinos. La tabla anterior se convierte en

Familia 1			Familia 2			Familia 3		
	Q (e)	M (MeV)		Q (e)	M (MeV)		Q (e)	M (MeV)
u	2/3	~ 310	c	2/3	1500	t	2/3	174300
d	-1/3	~ 310	s	-1/3	505	b	-1/3	4500
ν_e	0	~ 0	ν_μ	0	~ 0	ν_τ	0	~ 0
e	-1	0.5	μ	-1	106	τ	-1	1784

1.2. Interacciones

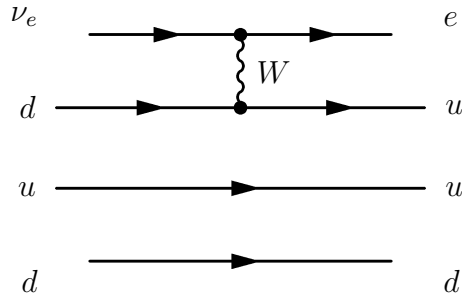
Las partículas de las tres familias están sujetas a cuatro tipos de interacciones: gravitacional, fuerte, débil y electromagnética. En el modelo estándar, la interacción gravitacional se desprecia. Una breve revisión de las características de las otras tres interacciones:

Interacción electromagnética

Como sabemos, se describe con mucha precisión con un modelo basado en una teoría de calibre del grupo $U(1)_{em}$, la electrodinámica cuántica (QED). Los mediadores de la interacción son pues campos de calibre con $\text{spin}=1$, los fotones. Entre las partículas del MS, únicamente los neutrinos son inmunes a la interacción electromagnética.

Interacción Fuerte

Se llama así a la interacción entre quarks, o de color. Es la responsable de producir estados ligados de tres quarks (hadrones, como el protón y el neutrón) o de quark-antiquark (mesones). Su principal característica es la *libertad asintótica*, que no discutiremos en este curso. Baste decir que los estados con carga de color no se encuentran libres en la naturaleza, sino que podemos observar únicamente estados ligados neutros en color.

Figura 1.1: Decaimiento β

La interacción fuerte se puede describir con una teoría de calibre tipo Yang-Mills, basada en el grupo $SU(3)_C$. Esto implica la existencia de ocho campos de calibre, mediadores de la interacción, por ser esta la dimensión de la representación adjunta de $SU(3)$. Los mediadores de la interacción fuerte se llaman comúnmente *gluones*, y no tienen carga electromagnética ni interactúan débilmente.

Interacción Débil

La interacción débil es la responsable del conocido decaimiento β

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$$

que en términos de los componentes elementales de neutrones y protones puede representarse con el diagrama de la Fig. 1.1

Es decir, quisiéramos tener una teoría de Yang-Mills donde el bosón de calibre, llamado W en el diagrama, sea el mediador de la interacción de forma análoga al fotón. En la próxima sección detallaremos las características fenomenológicas de esta interacción. Por lo pronto, del diagrama puede verse que el bosón W debe tener carga electromagnética, de otro modo ésta no se conservaría en los vértices representados. Es decir, los generadores del grupo de simetría de la interacción débil, T_L , no conmutan con la carga electromagnética:

$$[T_L, Q] \neq 0 \quad (1.1)$$

Por otra parte, como veremos, los campos de calibre W no tienen masa cero, de modo que de alguna manera, esa simetría está rota en la naturaleza.

Sin embargo, una primera idea de la existencia de un grupo de simetría es la conservación de lo que se llamaba el *número de Isospin*. Éste es un

número cuántico asociado a una simetría $SU(2)_I$ definida de tal manera que los protones y los neutrones son componentes de un doblete

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

El isospín se conserva en las interacciones nucleares, es decir, aquellas que involucran únicamente la fuerza fuerte. Se tiene que los generadores de $SU(2)_I$, T_I , son tales que

$$[T_I, H_f] = 0, \quad [T_I, H_{em}] \neq 0 \quad (1.3)$$

Donde H_f es el Hamiltoniano efectivo de las interacciones nucleares, H_{em} el del electromagnetismo. Como puede verse, el grupo de isospín no es una simetría de las interacciones fundamentales, sino solamente de parte de ellas, sin embargo nos da una motivación para considerar la simetría $SU(2)$.

El MS consistirá en una descripción de las interacciones mencionadas, entre los fermiones de las tres familias. Para ello, vamos a tener que encontrar cuál es el grupo de simetría del MS, que debe comprender el grupo de Poincaré (Λ) y grupos de simetría interna (G_i):

$$G = \Lambda \times G_i \quad (1.4)$$

Veamos cuáles serán los elementos de esa descripción.

1.3. Elementos de la descripción

Todas las partículas de la tabla serán descritas con objetos que transforman bajo representaciones irreducibles del grupo G . Aún no sabemos cuál es ese grupo, pero sí que contiene al grupo de Poincaré, de modo que nuestros campos deben transformar de acuerdo a representaciones irreducibles del grupo de Lorentz. Tenemos que describir dos tipos de partículas: fermiones y bosones de calibre.

Fermiones

Los fermiones se describen con representaciones espinoriales del grupo de Lorentz. Esto es, una representación donde los generadores del grupo se

pueden escribir como

$$\Sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (1.5)$$

donde las matrices γ son 4 matrices de dimensión 4, que siguen un álgebra de Clifford¹

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (1.6)$$

De esta manera, los elementos del grupo de Lorentz quedan escritos en términos de los seis parámetros $\theta_{[\mu\nu]}$ (3 boosts y 3 rotaciones), como

$$\Lambda = e^{i\theta_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}} \quad (1.7)$$

Los fermiones son entonces objetos compuestos de *cuatro* campos que transforman como

$$\psi' = \lambda\psi \quad (1.8)$$

Un fermión libre de masa m obedece la ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \equiv (i\not{\partial} - m)\psi = 0 \quad (1.9)$$

Sin embargo, la representación 4-dimensional del grupo de Lorentz no es una representación irreducible. Esto puede verse fácilmente escogiendo una base en el espacio del grupo donde los generadores tengan forma de matrices diagonales por bloques:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

En esta base tendremos

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

(con σ_i las matrices de Pauli), y escribimos los elementos del grupo en términos de $\phi_i \equiv \theta_{0i}$, $\theta_i = \epsilon_{ijk}\theta_{jk}$:

Boosts:

$$e^{i\theta_{0i}\Sigma^{0i}} = \begin{pmatrix} e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}/2} & 0 \\ 0 & e^{\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}/2} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

¹En adelante, los subíndices griegos correrán de 0 a 3, los latinos de 1 a 3, y usaremos $g_{\mu,\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

Rotaciones:

$$e^{i\theta_{ij}\Sigma^{ij}} = \begin{pmatrix} e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/2} \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Puede verse que la representación 4-d se descompone en dos representaciones *irreducibles* bidimensionales. Los proyectores sobre los subespacios correspondientes son

$$L \equiv \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right), \quad R \equiv \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \quad (1.14)$$

De este modo, definimos los espinores;

$$\psi_L \equiv L\psi, \quad \psi_R \equiv R\psi \quad (1.15)$$

Nótese que cada uno tiene en realidad dos componentes independientes, aunque estén escritos como vectores de un espacio 4-dimensional, por conveniencia. Transformarán bajo representaciones irreducibles:

$$\Lambda_R = R\Lambda = \begin{pmatrix} e^{-i(\vec{\theta}-i\vec{\phi})\cdot\vec{\sigma}/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_L = L\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(\vec{\theta}+i\vec{\phi})\cdot\vec{\sigma}/2} \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Nótese que $(\Lambda_L)^\dagger = (\Lambda_R)^{-1}$, es decir, $\psi^\dagger\psi$ no es un invariante de Lorentz.

Es a veces conveniente escribir los espinores de Dirac en términos de espinores de Weyl de dos componentes:

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi_R \\ \varphi_L \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Paridad

Estos espinores de dos componentes están relacionados por una transformación de paridad, definida como aquella que cambia el signo de las componentes espaciales de las coordenadas:

$$\psi_P(-\vec{x}, t) = P\psi(\vec{x}, t) \quad (1.18)$$

Usando la ecuación de Dirac, puede demostrarse inmediatamente que el operador paridad es

$$P = \gamma^0 \quad (1.19)$$

Es decir, bajo paridad:

$$\varphi_L \rightarrow \varphi_R \quad (1.20)$$

$\bar{\psi}\psi =$	$\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R$	masa de Dirac
$\psi^T C\psi =$	$\psi_L^T C\psi_L + \psi_R^T C\psi_R + h.c.$	masa de Majorana
$\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi =$	$\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R$	término cinético

Cuadro 1.1: Invariantes de Lorentz con fermiones

Conjugación de Carga

La ecuación de Dirac para una partícula acoplada con un campo de calibre de $U(1)$ es

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0 \quad (1.21)$$

El espinor *conjugado de carga*, ψ^c es uno que satisface:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi^c = 0 \quad (1.22)$$

Es decir

$$\psi^c \equiv C\bar{\psi}^T = i\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}^T = i\gamma^2\psi^* \quad (1.23)$$

Entonces bajo conjugación de carga tendremos

$$\varphi_L \rightarrow -i\sigma_2\varphi_R^* \quad \varphi_R \rightarrow i\sigma_2\varphi_L^* \quad (1.24)$$

Helicidad

La ecuación de Dirac mezcla las componentes L y R de los espinores, en el espacio de momentos tenemos

$$(\not{p} - m)\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \not{p}\psi_R = m\psi_L \quad (1.25)$$

Para una partícula sin masa, o en los casos en que $p \gg m$:

$$\not{p}\psi_L = \begin{pmatrix} 0 & p_0 - \vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ p_0 + \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_R \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.26)$$

Y una relación análoga para ψ_L . Vemos que los espinores de Weyl φ_L, φ_R son autoestados del *operador helicidad*, \hat{h} :

$$\hat{h}\varphi_L \equiv \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{2p_0}\varphi_L = \frac{1}{2}\varphi_L \quad (1.27)$$

$$\hat{h}\varphi_R \equiv \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{2p_0}\varphi_R = -\frac{1}{2}\varphi_R \quad (1.28)$$

Una “partícula de Dirac” está entonces compuesta por dos autoestados de helicidad, y se puede escribir para ella un término de masa de Dirac, tal como aparece en la tabla 1.1.

Si se dispone de una partícula sin masa, con un sólo estado de helicidad, podemos escribir un espinor de Majorana, imponiendo la condición

$$\varphi_R = -i\sigma_2\varphi_L^* \quad (1.29)$$

El lector puede comprobar que efectivamente ambos lados de la ecuación transforman bajo la representación Λ_R . Una partícula de este tipo admite un término de masa de Majorana:

$$\psi^T C\psi + h.c. = -\varphi_L^T i\sigma_2\varphi_L + h.c. \quad (1.30)$$

Sin embargo nótese que este tipo de términos de masa, que pueden involucrar sólo un estado de helicidad, no son invariantes ante ningún grupo de simetría que sea un grupo de Lie compacto, como los que postularemos para las simetrías internas. Las partículas que pueden tener masa de Majorana deben ser totalmente neutras.

Bosones de calibre

En una teoría de Yang-Mills, las derivadas de campos que transforman en la representación fundamental se reemplazan por derivadas covariantes

$$\partial_\mu\Phi \rightarrow (\partial_\mu - igA_\mu)\Phi \quad (1.31)$$

donde g es la constante de acoplamiento de calibre, y A_μ es el campo de calibre, escrito como una combinación lineal de los generadores del grupo en la representación fundamental, T_a :

$$A_\mu = A_\mu^a T_a \quad (1.32)$$

Ante una transformación de calibre:

$$\Phi \rightarrow U\Phi \equiv e^{i\alpha_a(x)T_a}\Phi \quad (1.33)$$

$$A_\mu \rightarrow U A_\mu U^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger \quad (1.34)$$

Si α es un parámetro infinitesimal:

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a + f^{abc} \alpha^b A_\mu^c \quad (1.35)$$

donde f^{abc} son las constantes de estructura del grupo. Es decir, los campos de calibre transforman *de calibre* y también *bajo el grupo*, en la representación adjunta. El término cinético para los campos de calibre es

$$F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}, \quad F_{\mu\nu}^a T^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b T^c \quad (1.36)$$

La invariancia de calibre no permite escribir términos de masa

$$A_\mu A^\mu \quad (1.37)$$

Las teorías de Yang-Mills representan entonces interacciones mediadas por campos de calibre sin masa.

Q.E.D

Como primera aproximación a la teoría que vamos a construir, ignoramos por el momento las interacciones fuertes y débiles. El Lagrangeano de la QED es

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sum_f (i\bar{\psi}_f \gamma^\mu D_\mu \psi_f - m\bar{\psi}_f \psi_f) \quad (1.38)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ieq_f A_\mu \quad (1.39)$$

donde el subíndice f denota los distintos fermiones y q_f son sus cargas electromagnéticas. La corriente electromagnética es

$$J_\mu^{em} = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \quad (1.40)$$

y la carga eléctrica está conservada.

Para la primera generación de fermiones, tendremos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{e}(\gamma^\mu \partial_\mu + ieA_\mu)e + i\bar{u}(\gamma^\mu \partial_\mu - i\frac{2}{3}eA_\mu)u \\ & + i\bar{d}(\gamma^\mu \partial_\mu + i\frac{1}{3}eA_\mu)d + i\bar{\nu}_e \gamma^\mu \partial_\mu \nu_e + (\text{term. de masa}) \end{aligned} \quad (1.41)$$

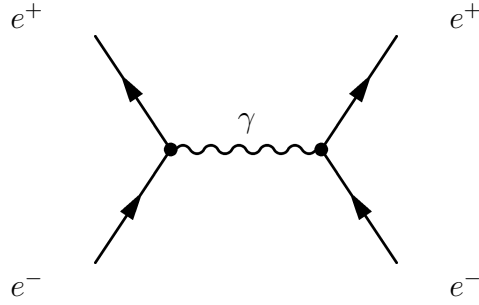


Figura 1.2: Dispersión de electrones

Muchas veces resultará conveniente escribir los términos de interacción con el fotón (y con otros bosones de calibre) como, por ejemplo:

$$\bar{e}\gamma^\mu A_\mu e = A_\mu J_e^\mu \quad (1.42)$$

Caja 1.1: POTENCIAL ELECTROMAGNÉTICO

Nos proponemos encontrar una expresión para el potencial electromagnético entre dos partículas con carga q . Considérese por ejemplo la dispersión entre electrones representada por el diagrama de la Fig.1 Dará lugar a un término efectivo de interacción

$$q^2 \bar{e}\gamma^\mu e \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} \right) \quad (1.43)$$

En el límite no relativista, cuando $m_e \gg |\vec{p}|, |\vec{p}'|$, se puede probar que

$$\bar{e}\gamma^\mu e \simeq \bar{e}\gamma^0 e = e^\dagger e \quad (1.44)$$

Luego:

$$q (\bar{e}\gamma^\mu e) \simeq q J_0 = Q \quad (1.45)$$

Pasando al espacio de coordenadas, 1.43 da entonces el potencial de interacción expresado en términos de la densidad de carga Q :

$$V(\vec{r}) = -iQ^2 \int d^3k \frac{1}{k^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = -2\pi i Q^2 \int k^2 dk \int \frac{1}{k^2} e^{ir \cos \theta} \quad (1.46)$$

Efectuando la integración angular

$$V(r) = -\frac{2\pi i}{r} Q^2 \int k dk \frac{1}{k^2} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \quad (1.47)$$

Ahora bien, supongamos que el campo de calibre A_μ fuera masivo. Cambiando

$$k^2 \rightarrow k^2 + m^2 \quad (1.48)$$

la integral en 1.47 se convierte en una con polos en $\pm im$, luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikr} \frac{k dk}{k^2 + m^2} = \pi i e^{-mr} \quad (1.49)$$

y lo mismo se obtiene para la otra integral. Así

$$V(r) = 4\pi^2 \frac{Q^2}{r} e^{-mr} \quad (1.50)$$

Vemos que si el campo de calibre no tiene masa, se tiene el potencial usual. En cambio, si se permite $m \neq 0$ de alguna forma, se tiene un potencial que decrece rápidamente con la distancia: un fuerza de corto alcance.

Por lo que hemos visto, entonces, para construir el MS necesitamos:

1. **grupo de simetría:** $G = \text{Poincaré} + G_i$
2. **fermiones:** representaciones irreducibles de G ; espinores quirales de Lorentz; representaciones fundamentales de los grupos en G_i
3. **bosones de calibre:** vectores de Lorentz, representaciones adjuntas de los grupos en G_i . No pueden tener masa.

El grupo G_i

Cuál será el grupo adecuado de simetrías internas G_i ? Sabemos que debe contener

$$SU(3)_C - \text{interacción fuerte.}$$

Además, esperamos tener

$$U(1)_{em}, \quad SU(2)_I$$

El grupo de la interacción fuerte es una simetría exacta de la naturaleza, así como el electromagnetismo. Pero además, el Hamiltoniano de la interacción fuerte conmuta con el electromagnético y con el isospín. Podemos entonces decir que esperamos hasta ahora

$$G_i = SU(3)_c \times G_{sm} \tag{1.51}$$

Donde G_{sm} es el grupo que conduce al electromagnetismo y las interacciones débiles. De hecho $SU(3)$ es una simetría exacta y las interacciones fuertes se describen simplemente como una teoría de Yang-Mills basada en $SU(3)$, con los quarks de las tres familias como contenido fermiónico. El estudio del modelo estándar usualmente no comprende QCD. Aquí sólo vamos a dar un resumen de las características más importantes de la interacción fuerte:

- La simetría es exacta, los 8 gluones (campos de calibre) son campos sin masa. Además, en la naturaleza se observan únicamente estados neutros.
- Los generadores de $SU(3)_c$ son las 8 matrices de Gell-Mann, λ_a , con $a=1..8$. Luego los gluones se escriben

$$G_\mu = G_\mu^a \lambda_a$$

- Únicamente los quarks transforman bajo $SU(3)_c$, y lo hacen bajo la representación fundamental:

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

- Las corrientes no serán neutras de color, y se escribirán

$$J_\mu^{ij} = \bar{q}^i \gamma_\mu q^j$$

- El Lagrangeano de la QCD para la primera familia lucirá como

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + \bar{u}_i \gamma^\mu (\partial_\mu \delta_{ij} + ig G_\mu^a \lambda_{ij}^a) u_j \quad (1.52)$$

$$+ \bar{d}_i \gamma^\mu (\partial_\mu \delta_{ij} + ig G_\mu^a \lambda_{ij}^a) d_j + m_u \bar{u}_i u_i + m_d \bar{d}_i d_i \quad (1.53)$$

Nótese que no está permitido incluir términos de masa de Majorana, y que preserva P y C.

En el siguiente capítulo estudiaremos con cierto detalle la fenomenología de las interacciones débiles, para tratar de discernir cuál debe ser el grupo G_{sm}

Problema 1

Encontrar los operadores de Carga y Paridad.

Problema 2

Comprobar que los invariantes de Lorentz de la tabla 1.1 lo son, y hallar como transforman bajo C, P y CP.

Problema 3

Usando la representación de Dirac para las matrices γ^μ , tomar el límite no relativista y demostrar (1.44).

Problema 4

Rellenar los pasos intermedios que conducen a (1.50).

Capítulo 2

Interacciones Débiles

El decaimiento β puede describirse con el Lagrangeano efectivo de Fermi (1934), escrito para protones y neutrones

$$\mathcal{L}_F = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}[\bar{p}\gamma_\mu n][\bar{e}\gamma^\mu \nu_e] + h.c. = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}J_\mu^\dagger J^\mu \quad (2.1)$$

donde G_F , la constante de Fermi, da una medida de la intensidad de la interacción y aún se usa hoy en día para caracterizar los procesos.

Este Lagrangeano efectivo debe provenir de una teoría que involucre quarks y leptones. Posteriormente, una serie de adelantos teóricos y experimentales (Lee-Yang 1956, el famoso experimento de Madame Wu 1958) permitieron dilucidar la estructura de estas interacciones. No haremos un recuento histórico, sino que daremos el resultado y algunos ejemplos de procesos que ilustran cómo se llegó a él.

La corriente efectiva puede separarse en corrientes leptónicas J_ℓ^μ y hadrónicas J_h^μ :

$$J^\mu = J_\ell^\mu + J_h^\mu \quad (2.2)$$

con

$$J_\ell^\lambda = \bar{\nu}_e \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) e \quad (2.3)$$

$$J_h^\lambda = \bar{u} \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) d_\theta; \quad d_\theta = \cos(\theta_c) d + \sin(\theta_c) s \quad (2.4)$$

Observaciones: La corriente hadrónica incluye el quark s , el primero de la segunda familia en ser descubierto en procesos que se llamaron “extraños” (de allí su nombre, *strange*). El parámetro θ_c , el ángulo de Cabibbo, es un resultado experimental. Pero la observación más importante es la presencia

del proyector $L = (1 - \gamma_5)/2$, que implica una *violación máxima de la paridad* en las interacciones débiles. Este es un hecho experimental.

Caja 2.1: \not{P} : DECAIMIENTO DE W

Un bosón de interacción débil W^- , partícula de spin=1, puede decaer en un electrón y un antineutrino:

$$W^- \rightarrow e + \bar{\nu}_e \quad (2.5)$$

El W^- es mucho más pesado que el electrón, $m_W \gg m_e$, por lo que podemos hacer la aproximación de que el electrón está constituido por dos autoestados de helicidad que no se mezclan:

$$e = \begin{pmatrix} e_R \\ e_L \end{pmatrix} \quad \hat{h} e_{L(R)} = \pm \frac{1}{2} e_{L(R)} \quad (2.6)$$

El neutrino estará compuesto de manera similar, por estados de helicidad puros, por cuanto no tiene masa.

Exigiremos que 2.5 suceda de modo que se conserve el momento angular total

$$J_{inicial} = J_{final} \quad (2.7)$$

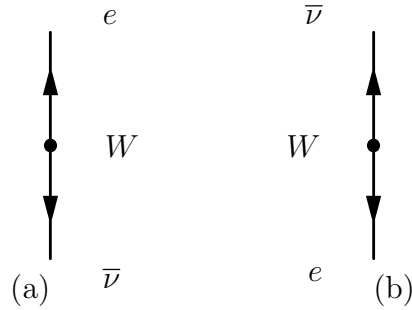
Si partimos de un haz polarizado de W^- , podemos escoger el sistema de referencia de modo que éste esté en reposo y su spin \vec{S} en la dirección z :

$$J_{inicial}^i = S_z \delta_z^i = 1 \delta_z^i \quad (2.8)$$

Además, se debe conservar el momentum, de modo que e y ν parten en direcciones opuestas. Existen dos posibilidades, como se muestra en la figura 2

(a) *Si e sale en la dirección positiva del eje z :*

$$J_z^{final} = 1 = s_z^e + s_z^\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad (2.9)$$



Recordando que la helicidad está definida como la proyección $\hat{p} \cdot \vec{s}$ del spin sobre el momentum, tenemos

$$\hat{h}(e) = \hat{p} \cdot s_z^e = s_z^e = 1/2 \quad \hat{h}(\bar{\nu}) = \hat{p} \cdot s_z^\nu = -s_z^\nu = -1/2 \quad (2.10)$$

Es decir, en este caso las helicidades izquierdas e_L y ν_L estarían involucradas.

(b) Si e sale en la dirección negativa del eje z :

$$\hat{h}(e) = \hat{p} \cdot s_z^e = -s_z^e = -1/2 \quad \hat{h}(\bar{\nu}) = \hat{p} \cdot s_z^\nu = s_z^\nu = 1/2 \quad (2.11)$$

En este caso las helicidades derechas e_R y ν_R participarían.

En el decaimiento W^- , se mide entonces el número de electrones que salen en ambas direcciones, a través de (a) o de (b). Si la paridad se conservara en la naturaleza, se esperaría encontrar la mitad de los electrones subiendo y la mitad bajando. Lo que se observa en cambio es la posibilidad (a), con una probabilidad del 99%. En otras palabras, sólo las partículas “izquierdas” interactúan con W^- .

Los piones son mesones, partículas compuestas por quark y anti-quark:

$$\pi^- = \bar{u}d \quad (2.12)$$

con masa $m_\pi \sim 140\text{MeV}$ y $\text{spin}=0$. Pueden en principio decaer via interacción débil (con un largo tiempo de vida media) por dos canales:

$$(a) \quad \pi^- \rightarrow e + \bar{\nu}_e$$

$$(b) \quad \pi^- \rightarrow \mu + \bar{\nu}_\mu$$

Sin embargo, el canal (a) no se observa. Como $m_\pi \gg m_e$, el electrón puede considerarse sin masa, y se aplica el razonamiento que se siguió en el caso del decaimiento del bosón W . En el sistema en reposo con el π , tendremos:

$$J_{inicial} = 0; \quad J_{final} = s_z^e + s_z^\nu = \pm 1 \quad (2.13)$$

dependiendo de la dirección en la que salga el electrón. El proceso no puede ocurrir.

En cambio, en el caso de μ , su masa es comparable con π , los estados de helicidad de μ se mezclan, produciendo efectos del orden de la masa m_μ :

$$\Gamma_{\pi \rightarrow \mu} \propto m_\mu^2 \quad (2.14)$$

De hecho, se observa precisamente:

$$\frac{\Gamma_{\pi \rightarrow \mu}}{\Gamma_{\pi \rightarrow e}} \simeq \left(\frac{m_\mu}{m_e} \right)^2 \sim 10^4 \quad (2.15)$$

2.1. Teoría V-A

Como la cantidad

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad (2.16)$$

transforma como un vector de Lorentz, mientras que

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \quad (2.17)$$

transforma como un pseudovector o vector axial (cambia de signo bajo paridad), el Lagrangeano electrodébil, con términos del tipo

$$\bar{\psi}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)\psi \quad (2.18)$$

se suele llamar Lagrangeano $V - A$. Se ve explícitamente que no conmuta con el operador paridad.

↪ *Las interacciones débiles violan la paridad máximamente*

Tratemos de escribir este Lagrangeano como una teoría de calibre de un grupo no-abeliano. No sabemos aún cuál será este grupo, pero incluiremos por ahora los bosones observados antes de la construcción de la teoría, que son los cargados, W^- y W^+ . De los términos con derivada covariante obtendremos una interacción:

$$\mathcal{L}_{int} = g\bar{\nu}_e\gamma^\lambda(1 - \gamma_5)eW_\lambda^+ + g\bar{u}\gamma^\lambda(1 - \gamma_5)d_\theta W_\lambda^+ \quad (2.19)$$

Vemos que las corrientes J_ℓ^λ , J_h^λ son corrientes con carga electromagnética. De nuevo vemos que, si los generadores del grupo débil son T_a , tenemos

$$[T_a, Q_{em}] \neq 0 \quad (2.20)$$

Esto quiere decir que el grupo de simetría no puede ser un producto externo, $U(1)_{em} \times G_{debil}$

↪ *Las interacciones débiles involucran corrientes cargadas*

En el Lagrangeano (V-A), no participan los estados de quarks de la primera familia, sino la combinación

$$d_\theta = \cos(\theta_c)d + \sin(\theta_c)s \quad (2.21)$$

Sin embargo, lo mismo no sucede en el sector leptónico

↪ *Las interacciones débiles mezclan familias de quarks y no de leptones*

Por otra parte, el Lagrangeano efectivo de Fermi nos indica que existen interacciones efectivas de 4 fermiones. Esto equivale a decir que tenemos una interacción con un bosón de calibre masivo, como en la figura 2.1 Se tiene

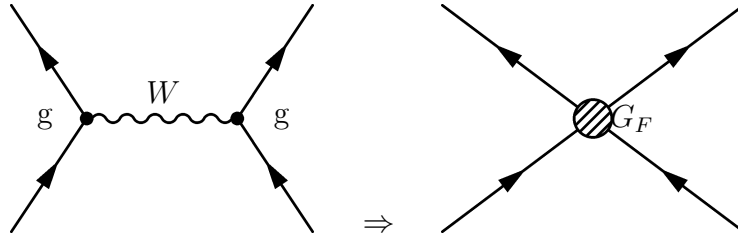


Figura 2.1: Lagrangeano de Fermi a partir de una teoría de calibre

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{M_W^2} \quad (2.22)$$

Donde g es el acoplamiento de calibre y M_W la masa del bosón. La interacción sería de corto alcance. Pero una teoría con bosones masivos no es renormalizable. Si escribimos el Lagrangeano para W

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + M_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu \quad (2.23)$$

tendríamos un propagador

$$\Delta_{\mu\nu} = -\frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / M_W^2}{k^2 - M_W^2} \quad (2.24)$$

Para momentos grandes, $k \rightarrow \infty$:

$$\Delta_{\mu\nu} \rightarrow (cte) \cdot \frac{1}{M_W^2} \quad (2.25)$$

da lugar a una teoría no-renormalizable. No es extraño, puesto que el término de masa ha destruido la invariancia de calibre que protegía la renormalizabilidad de la teoría.

↔ *Las interacciones débiles tienen bosones mediadores masivos, que destruyen la invariancia de calibre y la renormalizabilidad.*

De todas maneras, supongamos que insistimos en describir la teoría con un cierto grupo de simetría G_{debil} . Como vimos, únicamente los fermiones con helicidad izquierda transformarán no trivialmente bajo este grupo. Digamos

que lo hacen en la representación fundamental, y que este grupo es $SU(2)$ (como el isospin). Tendremos tres bosones de calibre

$$(W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3) \quad (2.26)$$

Si hacemos

$$\ell_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

tendremos, de la derivada covariante, un término

$$\bar{\ell}_L^i \gamma^\mu (W_\mu^a T_{ij}^a) \ell_L^j \quad (2.28)$$

y los T^a estarán dados por las matrices de Pauli, es decir;

$$W_\mu^a T_a = W^+ \sigma^+ + W^- \sigma^- + W^3 \sigma^3 \quad (2.29)$$

donde hemos hecho $\sigma^\pm = \sigma^1 \pm i\sigma^2$ y $W_\mu^\pm = (W_\mu^1 \pm iW_\mu^2)/\sqrt{2}$. Este termino produciría una interacción

$$(\bar{\nu}_L \quad \bar{e}_L) \gamma^\mu W_\mu^+ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} = \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L W_\mu^+ \quad (2.30)$$

que es precisamente el que queremos. Al menos en el sector leptónico, que no mezcla familias, $SU(2)$ es un buen candidato para ser el grupo débil. Sin embargo, hemos puesto en el doblete ℓ_L dos partículas de masa distinta, $m_\nu \neq m_e$. Esto equivale a decir que los generadores del grupo no conmutan con el Hamiltoniano total

$$[H, T_a] \neq 0 \quad (2.31)$$

De hecho, no conmutan con la parte electromagnética tampoco (las cargas de ν y e son distintas, únicamente con el Hamiltoniano de color.

↔ El grupo de simetría de las interacciones débiles no conmuta con el Hamiltoniano, la simetría está rota.

2.2. Primer intento

Intentamos construir una teoría de interacciones débiles análoga a QED y QCD, basada en un grupo G_{debil} , pero hemos encontrado

1. sólo ψ_L participan de las interacciones débiles
2. las corrientes débiles tienen carga
3. las corrientes mezclan familias de quarks, no de leptones
4. los mediadores de la interacción son masivos
5. $[G_{debil}, H] \neq 0$: no hay tal simetría

Todos estas características se puede explicar si G_{debil} está espontáneamente roto, como veremos. Antes, hagamos una primera aproximación a su construcción, ignorando por los momentos los problemas tales como la masa de los bosones de calibre, y consideremos una sólo familia de fermiones.

El mejor candidato, sugerido por la teoría $V - A$, es $SU(2)$. Extendiendo los resultados de arriba para las corrientes leptónicas, diremos que los espinores izquierdos, que representarían los estados de helicidad 1/2 en partículas sin masa, transforman como dobletes (rep. fundamental) de $SU(2)$:

$$\ell_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} ; \quad q_L \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Mientras que los derechos son invariantes bajo $SU(2)$, o singletes

$$e_R ; \quad u_R ; \quad d_R \quad (2.33)$$

El estado de helicidad derecho del neutrino no existe, es decir, no se observa en ninguna interacción. Tendremos tres bosones de calibre correspondientes a estados en la representación adjunta de $SU(2)$:

$$W_\mu^+ ; \quad W_\mu^- ; \quad W_\mu^3 \quad (2.34)$$

Donde como vimos, W_μ^\pm tienen cargas electromagnéticas ± 1 , y W^3 tendrá carga 0, siendo sus interacciones

$$\bar{\psi}_i \gamma^\mu W_\mu^3 \sigma_{ij}^3 \psi_j \quad (2.35)$$

y σ^3 es diagonal. A priori, W_μ^3 es entonces un candidato a ser el fotón. Esto no es posible por dos razones. En primer lugar, sólo los fermiones izquierdos interactúan con W_μ^3 , luego los derechos deberían tener carga electromagnética cero, que no es el caso. También

$$(\bar{\nu}_L \quad \bar{e}_L) \gamma^\mu W_\mu^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} = (\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L) W_\mu^3 \quad (2.36)$$

Y como sabemos ν no tienen carga.

Nos vemos en la necesidad de introducir otro bosón de calibre que pueda, luego del rompimiento espontáneo de simetrías, darnos un fotón. Buscamos un grupo $U(1)$ que conmute con el $SU(2)$ sugerido. Este grupo es el de la llamada *hipercarga*, Y , y su generador es

$$Y = 2(Q - T_{3L}) \quad (2.37)$$

donde Q es el de la carga electromagnética y T_{3L} es el generador diagonal de $SU(2)$. Nuestros fermiones izquierdos están en la representación fundamental, luego los autovalores de T_{3L} son $\pm 1/2$, y son 0 para los fermiones derechos. Con esta escogencia, se tiene que las dos componentes de los dobletes tiene la misma hipercarga. En total:

Campo	$Y/2$
e_R	-1
u_R	2/3
d_R	-1/3
ℓ_R	-1/2
q_R	1/6
W_μ	0

Construiremos entonces el modelo estándar como una teoría basada en el grupo $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ que se rompe espontáneamente a $SU(3)_c \times U(1)_{em}$.

Problema 5

Demuestre que la hipercarga Y definida como arriba es la única carga posible tal que $U(1)_Y$ conmuta con $SU(2)_L$

Capítulo 3

Rompimiento espontáneo de simetrías

3.1. Simetrías Discretas

Sea ϕ un campo escalar real con Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi^2) \quad (3.1)$$

Claramente, es invariante bajo una simetría Z_2 :

$$\phi \rightarrow -\phi \quad (3.2)$$

Supongamos que el potencial tiene dos mínimos globales en $\phi = \pm v$, por ejemplo

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 = -\frac{m_\phi^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 + cte. \quad (3.3)$$

representando un campo con masa imaginaria

$$-m_\phi^2 \equiv -\lambda v^2 \quad (3.4)$$

El *valor de expectación en el vacío* (vev) de este campo será la configuración clásica de menor energía

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle \equiv \langle \phi \rangle = \pm v \quad (3.5)$$

Al contrario de lo que sucede con un campo habitual con masa real, el valor de expectación de este campo no se anula. Podemos definir un nuevo campo

$$\eta \equiv \phi - v \quad (3.6)$$

tal que

$$\langle \eta \rangle = 0 \quad (3.7)$$

El Lagrangeano para η será

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \frac{\lambda}{4} (\eta^2 + 2\eta v)^2 \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \frac{\lambda}{4} (\eta^4 + 4\eta^2 v^2 + 4\eta^3 v) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Es decir, tenemos un campo con masa $m_\eta^2 = 2\lambda v^2$, sujeto a un potencial que ya no tiene simetría Z_2 , rota por los términos cúbicos. Sin embargo, nótese que este no es el potencial más general que podría haberse escrito para un campo escalar real en ausencia de toda simetría: hay una precisa relación entre los coeficientes de las distintas potencias de η . Esto lo que indica es que se puede encontrar un cierto ϕ (el original) tal que el potencial presente esa simetría. En otras palabras, la simetría está *escondida*, y puede hacerse manifiesta con una redefinición de los campos. Sin embargo, si hacemos esto, perderemos la condición de que el vev de esos campos sea cero, y no podremos hacer la teoría cuántica en torno a este vacío. Este fenómeno se llama *rompimiento espontáneo de simetrías*, o SSB. Debe pensarse que la simetría está presente, pero se manifiesta de una manera distinta a la usual.

El SSB de una simetría discreta tiene interesantes consecuencias (por ejemplo la posibilidad de la existencia de paredes de dominio), pero nos interesa romper espontáneamente grupos de simetría continuos.

3.2. Caso abeliano: $U(1)$

Supongamos ahora que ϕ es un campo escalar complejo

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2 \quad (3.9)$$

con un Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi) \quad (3.10)$$

Es invariante bajo cambios de fase –el grupo $U(1)$

$$\phi \rightarrow e^{i\theta} \phi \quad (3.11)$$

Nuevamente, podemos escribir un potencial que tenga mínimos globales fuera del origen, como

$$V(\phi^* \phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi - v^2)^2 \quad (3.12)$$

Este potencial tiene su mínimo cuando ϕ toma valores sobre un círculo, es decir

$$\langle \phi^* \phi \rangle = v^2 \Rightarrow \langle \phi \rangle = e^{i\alpha} v \quad (3.13)$$

con $\alpha = 0.., 2\pi$, arbitrario. Supongamos que $\alpha = 0$, sin pérdida de generalidad (todos los “vacíos” parametrizados por α son equivalentes), o equivalentemente, el vev de ϕ es real:

$$\langle \phi_1 \rangle = v ; \quad \langle \phi_2 \rangle = 0 \quad (3.14)$$

Como en el caso de simetría discreta, definimos un campo desplazado η con vev nulo

$$\eta_1 = \phi_1 - v ; \quad \eta_2 = \phi_2 \quad (3.15)$$

En términos de este nuevo campo, tendremos

$$V = \frac{\lambda}{4} (\eta_1^2 + 2\eta_1 v + \eta_2^2)^2 \quad (3.16)$$

es decir

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta_1 \partial^\mu \eta_1 + \partial_\mu \eta_2 \partial^\mu \eta_2) \\ &- \frac{\lambda}{4} (\eta_1^4 + \eta_2^4 + 4\eta_1^2 v^2 + 2\eta_1^2 \eta_2^2 + 4\eta_1^3 v) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ya no tenemos la simetría $U(1)$, pero a cambio han desaparecido los campos con masa imaginaria. Tenemos ahora dos campos con masas

$$m(\eta_1) = 2\lambda v^2 ; \quad m(\eta_2) = 0 \quad (3.18)$$

η_2 , el campo sin masa, es lo que se denomina un *bosón de Nambu-Goldstone*.

3.3. Caso no-abeliano: $SO(n)$

El siguiente paso es considerar un grupo no abeliano. Tomemos como ejemplo el grupo $SO(n)$, rotaciones en un espacio n -dimensional. La sección anterior trataba de un caso particular, $U(1) \sim SO(2)$, por lo que será muy sencillo extender la discusión. Consideramos un campo escalar de n componentes reales que transforman bajo la representación fundamental de $SO(n)$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

El Lagrangeano será

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^T \partial^\mu \phi - V(\phi^T \phi) \quad V = \frac{\lambda}{4} (\phi^T \phi - v^2)^2 \quad (3.20)$$

de donde

$$\langle \phi^T \phi \rangle = v^2 \quad (3.21)$$

Existe una variedad de vacíos, conectados por una transformación de $SO(n)$, todos equivalentes entre sí. Si escogemos

$$\langle \phi^a \rangle = \delta_0^a \quad (3.22)$$

(con $a = 0 \dots n$), podemos definir las componentes del campo desplazado η

$$\eta_0 = \phi_0 - v \quad \eta_b = \phi_b \quad (b \neq 0) \quad (3.23)$$

obteniendo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \eta^a \partial^\mu \eta_a - \frac{\lambda}{4} (\eta_0^2 + 2\eta_0 v + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots)^2 \quad (3.24)$$

Nótese que los campos η_b , con $b = 1 \dots n$ tienen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \eta^b \partial^\mu \eta_b - \frac{\lambda}{4} (\eta^b \eta_b)^2 \quad (3.25)$$

es decir, sobrevive una simetría $SO(n-1)$. Tenemos en este caso $n-1$ bosones de Nambu-Goldstone, campos sin masa.

El Teorema de Goldstone predice exactamente cuántos bosones de Nambu-Goldstone deben aparecer cuando se rompe espontáneamente un grupo de simetría. Antes de probarlo, lo ilustraremos para el caso $SO(3)$.

$SO(3)$

Los generadores en la representación fundamental de $SO(3)$ son

$$(J_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk} \quad (3.26)$$

$$J_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Y escogiendo la dirección del vev

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

vemos que

$$J_1[\langle \phi \rangle] = 0 \quad J_2[\langle \phi \rangle] \neq 0 \quad J_3[\langle \phi \rangle] \neq 0 \quad (3.29)$$

Teorema de Goldstone *Por cada generador que no aniquila el vacío, hay un bosón de Nambu-Goldstone*

Un solo generador, J_1 , aniquila el vacío. Es decir, los elementos del grupo, U , generados por él, dejarán invariante el vacío

$$U\langle \phi \rangle \equiv e^{i\theta J_1} \langle \phi \rangle = \langle \phi \rangle \quad (3.30)$$

El vacío sigue siendo invariante ante algunos generadores del grupo, los del subgrupo que “sobrevive” a la ruptura espontánea de la simetría. Tenemos en este caso que

$$SO(3) \rightarrow SO(2) \sim U(1) \quad (3.31)$$

cuyo único generador identificamos con J_1 .

Es fácil extender esto a un grupo $SO(n)$ roto por el vev de un campo en la representación fundamental. Tendremos

$$SO(n) \rightarrow SO(n-1) \quad (3.32)$$

De los $n(n-1)/2$ generadores de $SO(n)$, se dice que $(n-1)(n-2)/2$ sobreviven (los de $SO(n-1)$), en el sentido de que siguen aniquilando el vacío, y obtendremos

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n-1$$

bosones de Goldstone.

Estos resultados se generalizan fácilmente a otros grupos compactos como los que necesitaremos para construir el modelo estándar. Veamos el caso de $SU(2)$

$SU(2)$

Sea un campo escalar, doblete de $SU(2)$,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

y un potencial que rompa esta simetría espontáneamente

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger\Phi - v^2)^2 \quad (3.34)$$

Escogemos la dirección de la vev

$$\langle\Phi\rangle = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

de modo que

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 - v + i\eta_2 \\ \eta_3 + i\eta_4 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

y tendremos tres campos sin masa, η_2, η_3, η_4 . Por otra parte, los generadores de $SU(2)$ son las matrices de Pauli, y puede verse fácilmente que ninguna de ellas aniquila el vacío: los tres generadores están “rotos”, y vemos de nuevo en acción el teorema de Goldstone. Hemos roto espontáneamente $SU(2)$ con la representación fundamental, y lo hemos roto completamente:

$$SU(2) \rightarrow 0 \quad (3.37)$$

3.4. Degeneración de estados

Cuando un grupo de simetría se rompe espontáneamente, se levanta la degeneración de los autoestados de energía que conviven en la representación del grupo. Sea U un elemento del grupo G , que conmuta con el Hamiltoniano

$$UH_0U^\dagger = H_0 \quad (3.38)$$

Y sean dos autoestados del Hamiltoniano conectados por una transformación del grupo

$$|A\rangle ; |B\rangle = U|A\rangle \quad (3.39)$$

Se sigue que

$$E_A = \langle A|H_0|A\rangle = \langle B|H_0|B\rangle = E_B \quad (3.40)$$

Como era de esperarse, dos autoestados que transforman bajo una misma representación del grupo tienen la misma energía (como por ejemplo los componentes de un doblete de $SU(2)$). Ahora, estos estados pueden definirse en términos de operadores de creación a partir del vacío:

$$|A\rangle = \hat{O}_A|0\rangle ; |B\rangle = \hat{O}_B|0\rangle \quad (3.41)$$

y tendremos

$$\hat{O}_B = U\hat{O}_AU^\dagger \quad (3.42)$$

Luego, de 3.39 tendremos

$$\hat{O}_B|0\rangle = U\hat{O}_A|0\rangle = U\hat{O}_AU^\dagger U|0\rangle = \hat{O}_B U|0\rangle \quad (3.43)$$

Es decir, necesitamos que el elemento U deje invariante el vacío

$$|0\rangle = U|0\rangle \quad (3.44)$$

Si esto no ocurre, se levantará la degeneración $E_A = E_B$. En el caso de $SU(2)$ completamente roto, las componentes del doblete tendrán distintas masas, que es precisamente lo que necesitamos para construir el MS.

Caja 3.1: TEOREMA DE GOLDSTONE

Sea un grupo G de simetría del Lagrangeano. El Teorema de Emmy Noether predice la existencia de una corriente y una carga conservada

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad Q(t) = \int d^3x J_0(\vec{x}, t) \quad (3.45)$$

Ahora, considérese un operador cualquiera, función de los campos de la teoría, $A(x)$. Se cumple

$$\begin{aligned}
0 &= \int d^3x [\partial^\mu J_\mu(x, t), A(0)] \\
&= \partial^0 \int d^3x [J_0(x, t), A(0)] + \int d\vec{S} \cdot [\vec{J}(x, t), A(0)] \quad (3.46)
\end{aligned}$$

y el último término podemos hacerlo desaparecer tomando una superficie suficientemente grande. Luego

$$\frac{d}{dt}[Q(t), A(0)] = 0 \quad (3.47)$$

Si los campos que entran en la combinación A son tales que

$$\langle 0|\phi|0\rangle \neq 0 \quad (3.48)$$

tendremos también

$$\langle 0|[Q(t), A(0)]|0\rangle \neq 0 \equiv \alpha \quad (3.49)$$

con α independiente del tiempo. Es decir

$$\langle 0|\int d^3x [J_0(x, t), A(0)]|0\rangle = \alpha \quad (3.50)$$

es independiente del tiempo.

Insertando en esta expresión una base completa de autoestados $|n\rangle$ del Hamiltoniano correspondiente, y el operador de traslación, integrando tenemos

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_n (2\phi)^3 \delta^3(\vec{p}) \{ \langle 0|J_0(0)|n\rangle \langle n|A(0)|0\rangle e^{iE_n t} \\
&\quad - e^{-iE_n t} \langle 0|A(0)|n\rangle \langle n|J_0(0)|0\rangle \} \quad (3.51)
\end{aligned}$$

Esta expresión no puede ser independiente del tiempo, si

$$\langle 0|A(0)|n\rangle \langle n|J_0(0)|0\rangle \neq 0 \quad (3.52)$$

a menos que el estado $|n\rangle$ tenga $E_n = 0$. Es decir, si la carga Q no “aniquila el vacío”, debe existir un estado de masa cero.

En el caso de un grupo no-abeliano, el razonamiento se repite para cada Q^a , de modo que por cada generador que no aniquile el vacío, existe un estado de masa cero, el bosón de Nambu-Goldstone.

Problema 6

Utilice la representación adjunta para romper espontáneamente $SU(2)$, encuentre los bosones de Nambu-Goldstone y diga que simetría sobrevive.

Problema 7

Considere una teoría con simetría $SO(3)$ global, y dos campos en la representación fundamental, ϕ_1 y ϕ_2 . Escriba un potencial para estos campos que obligue a ambos a tomar un vev, en direcciones tales que $SO(3)$ se rompa completamente.

Problema 8

Rompa $SU(5)$ con un campo en la representación adjunta, omitiendo del potencial términos cúbicos en el campo, y describa los diferentes patrones de ruptura de simetría.

Capítulo 4

Mecanismo de Higgs

Se llama *mecanismo de Higgs* a la ruptura espontánea de una simetría de calibre. Veamos separadamente los casos abeliano y no-abeliano.

4.1. Caso abeliano

Tenemos una teoría con un campo escalar que transforma bajo $U(1)$ de calibre:

$$\phi \rightarrow e^{i\theta(x)}\phi \quad (4.1)$$

Su Lagrangeano será semejante a 3.10, donde se reemplace la derivada usual por la derivada covariante

$$\partial_\mu\phi \rightarrow D_\mu\phi = (\partial_\mu - igA_\mu)\phi \quad (4.2)$$

donde hemos supuesto que ϕ tiene carga 1 bajo esta simetría. Además, tendremos que agregar los términos cinéticos correspondientes al campo de calibre.

Los términos cinéticos de $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ producen

$$\begin{aligned} (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) &= \partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 \\ &+ 2gA^\mu(\phi_1\partial_\mu\phi_2 - \phi_2\partial_\mu\phi_1) + g^2A_\mu A^\mu(\phi_1^2 + \phi_2^2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Si escogemos un potencial que rompa la simetría como 3.12, tendremos $\langle\phi\rangle = ve^{i\alpha}$, y podemos escoger nuevamente la fase cero. En términos de los campos desplazados

$$\eta_1 = \phi_1 - v \quad \eta_2 = \phi_2 \quad (4.4)$$

los términos cinéticos 4.3 quedan

$$\begin{aligned}
(D_\mu \eta)^*(D^\mu \eta) &= \partial_\mu \eta_1 \partial^\mu \eta_1 + \partial_\mu \eta_2 \partial^\mu \eta_2 \\
&+ 2gA^\mu (\eta_1 \partial_\mu \eta_2 - \eta_2 \partial_\mu \eta_1) + g^2 A_\mu A^\mu (\eta_1^2 + \eta_2^2) \\
&+ 2gvA^\mu \partial_\mu \eta_2 + 2g^2 v \eta_1 + g^2 v^2 A_\mu A^\mu
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Nótese que el último término es un *término de masa para el bosón de calibre*:

$$M_A = gv \tag{4.6}$$

proporcional al vev de ϕ . Tenemos también que el campo η_1 tiene, al igual que en el caso global, una masa

$$m_\eta = 2\lambda v^2 \tag{4.7}$$

Éste es el llamado *campo de Higgs*.

Parece que hemos conseguido nuestro objetivo de describir una teoría con simetría de calibre donde los bosones tienen masa. Sin embargo, podríamos pensar que este no es un efecto físico, sino removible con una transformación de calibre.

Usando la libertad de calibre, podemos pasar a lo que se llama el *calibre unitario*. Si escribimos ϕ en forma polar

$$\phi(x) = (\eta(x) + v)e^{iG(x)/v} \tag{4.8}$$

(donde η ahora es un campo real), vemos que el campo $G(x)$ puede ser removido mediante una transformación de calibre $U = e^{-iG(x)/v}$, quedando

$$\phi(x) = \eta(x) + v \tag{4.9}$$

Y el Lagrangeano completo en este calibre unitario es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_U &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{m_A^2}{A} A^\mu + \frac{g^2}{2} A_\mu A^\mu (\eta^2 + 2\eta v) \\
&\quad - \frac{\lambda}{4}(\eta^4 + 4v\eta^3) - \frac{m_\eta^2}{2}\eta^2
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Tenemos una teoría con

- un campo escalar real de masa m_η

- un bosón de calibre con masa m_A

El otro campo real, correspondiente al bosón de Nambu-Goldstone en la teoría con simetría global, ha desaparecido: éste es el mecanismo de Higgs. Si contamos los grados de libertad presentes en la teoría de ϕ y la de η :

$\langle \phi \rangle \neq 0$		$\langle \eta \rangle = 0$	
$\phi_1 + i\phi_2$	= 2	η	= 1
$A_\mu (m_A = 0)$	= 2	$A_\mu (m_A \neq 0)$	= 3

En ambos casos hay 4 grados de libertad en total. El grado de libertad extra que adquiere el bosón de calibre masivo, proviene de la desaparición de uno de los grados de libertad del campo escalar. Se dice que el bosón de calibre se ha comido al campo escalar G , y se ha puesto pesado. G se llama a menudo “would-be-Goldstone boson”, o “aspirante a bosón de Goldstone”.

Ahora bien, como hemos argumentado, la inclusión de términos de masa para los bosones de calibre resulta en la pérdida de simetría de calibre, luego en la pérdida de renormalizabilidad. Se ha perdido también en este caso la renormalizabilidad?

La respuesta es no. No hemos roto la simetría de calibre de manera arbitraria, poniendo un término de masa cualquiera, sino que la hemos roto espontáneamente, y la masa de A_μ depende de los parámetros del potencial de ϕ . La simetría no está rota, está espontáneamente rota, o escondida, y eso garantiza la renormalizabilidad.

4.2. Invariancia de calibre

Escribamos ϕ como

$$\phi = \eta + v + iG \quad (4.11)$$

(la parte imaginaria de ϕ coincide aproximadamente con G , el aspirante a bosón de Goldstone, si hacemos una expansión para $G \ll v$).

Agregamos al Lagrangeano un término general de calibre

$$\Delta\mathcal{L}_{calibre} = -\frac{1}{2}(\sqrt{\xi} g v G + \frac{1}{\sqrt{\xi}} \partial_\mu A^\mu)^2 \quad (4.12)$$

(que equivale al calibre relativista cuando $v = 0$).

Integrando por partes la acción total, tenemos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta) + \frac{1}{2}A_\mu \left[(\square + m_A^2)g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\nu - \frac{1}{2}G [\square + \xi m_A^2] G \quad (4.13)$$

Aquí se ve claramente que la masa de G depende del calibre, desaparece haciendo $\xi = 0$, en el calibre de Landau, de modo que no es física. En cambio, la de A_μ si lo es. Calculamos los propagadores para A_μ y G

$$\Delta_{\mu\nu}^\xi(A) = \frac{-i}{k^2 - m_A^2} \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - m_A^2 \xi} \right] \quad (4.14)$$

$$D^\xi G = \frac{i}{k^2 - \xi m_A^2} \quad (4.15)$$

Ahora podemos fijar calibres distintos:

- Calibre unitario: $\xi \rightarrow \infty$

$$\Delta_{\mu\nu}^\xi(A) \rightarrow \frac{-i}{k^2 - m_A^2} \left[g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_A^2} \right] \quad (4.16)$$

$$D^\xi G \rightarrow 0 \quad (4.17)$$

El aspirante a bosón de Goldstone, como sabíamos, desaparece en este calibre. El campo de calibre en cambio presenta graves divergencias cuando $k \rightarrow \infty$, como puede verse del segundo término. En este calibre, la teoría no parece renormalizable.

- Calibre de 'tHooft-Feynman: $\xi = 1$

$$\Delta_{\mu\nu}^\xi(A) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - m_A^2} \quad (4.18)$$

$$D^\xi G = \frac{i}{k^2 - m_A^2} \quad (4.19)$$

Tenemos una teoría con un boson G de masa m_A , y el propagador del bosón de calibre se comporta para $k \rightarrow \infty$ como

$$\Delta_{\mu\nu}^\xi(A) \rightarrow \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} \quad (4.20)$$

y no va producir divergencias que no se puedan remover.

- Calibre de Landau: $\xi = 0$

$$\Delta_{\mu\nu}^{\xi}(A) = \frac{-i}{k^2 - m_A^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2} \right] \quad (4.21)$$

$$D^{\xi}G = \frac{i}{k^2} \quad (4.22)$$

Tenemos un boson G sin masa, y un propagador de A bien comportado para momentos grandes.

Los dos últimos calibres escogidos se suelen llamar *renormalizables*, y contienen un campo G que no es físico. Si queremos estudiar procesos, lo conveniente es usar éstos, en tanto que si queremos tener una idea de cuales son los campos físicos de la teoría y sus masas, es preferible el calibre unitario. Afortunadamente, sigue siendo una teoría de calibre, aunque la simetría esté escondida (espontáneamente rota), y puede probarse rigurosamente que las matrices de dispersión de los procesos físicos no dependen de ξ .

4.3. Caso no-abeliano

Tomemos de nuevo como ejemplo $SO(3)$, y ϕ en la representación fundamental: $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. Tendremos tres campos de calibre que transforman bajo la representación adjunta, $A_{\mu} = (A_{\mu}^1, A_{\mu}^2, A_{\mu}^3)$. La derivada covariante lucirá como

$$D_{\mu}\phi_i = \partial_{\mu}\phi_i - igA_{\mu}^a(J^a)_{ij}\phi_j \quad (4.23)$$

donde los J^a son los de 3.27. Suponemos que ϕ toma su vev en la dirección 1, y definimos

$$\eta = \phi - \langle \phi \rangle = \phi - \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Tendremos la acción de cada generador

$$J_1\phi = J_1\eta; \quad J_2\phi = J_2\eta + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \quad J_3\phi = J_3\eta - \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Es decir

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \eta - igA_\mu^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + igA_\mu^3 \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

De modo que el término cinético contendrá

$$(D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) = (D^\mu \eta)^\dagger (D_\mu \eta) + \dots + g^2 v^2 (A_\mu^2 A^{\mu 2}) + g^2 v^2 (A_\mu^3 A^{\mu 3}) \quad (4.27)$$

Dos de los bosones de calibre adquieren masa –correspondientes a los dos bosones de Nambu-Goldstone de la teoría global. El mecanismo de Higgs a través del Teorema de Goldstone garantiza así la existencia de *un bosón de calibre por cada generador que no aniquila el vacío*. Sólo quedan sin masa los bosones de calibre del grupo de simetría que sobrevive a la ruptura, en este caso $SO(2) \sim U(1)$, con su fotón. En el calibre unitario, los campos η_2 y η_3 desaparecen, y al campo η_1 se le llama el Higgs.

Se podría preguntar que hubiera pasado si $\langle \phi \rangle$ se hubiera escogido en otra dirección, digamos la 3. En ese caso, A_μ^3 hubiera permanecido sin masa, lo que claramente no es más que un cambio de nombre. De hecho, si hubiéramos escogido

$$\langle \phi \rangle = v \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

seguiríamos obteniendo una combinación lineal de los tres A_μ sin masa, y dos con masa. En este caso, sería una combinación lineal de los tres generadores J la que sobreviviera, aniquilando el vacío, y sirviendo de generador a la simetría restante.

Hemos visto entonces que la representación fundamental de $SO(3)$ de calibre puede romper la simetría espontáneamente hasta $U(1)$ de calibre: el electromagnetismo.

Problema 9

Demuestre que (4.14) y (4.15) son efectivamente los propagadores para el campo de calibre y el bosón de N-G en esta teoría

Capítulo 5

Mecanismo de Higgs: inclusión de fermiones

El campo de Higgs, por cuanto toma valores de expectación en el vacío no nulos, debe ser un escalar de Lorentz (de otro modo, rompería esta simetría también). Esto quiere decir que tenemos que agregar al espectro de partículas del MS un bosón de spin 0, con un Lagrangeano compatible con las simetrías internas que hemos postulado. Debemos además asegurarnos que la componente del campo que tome un vev sea neutra respecto a las simetrías que queremos preservar en la teoría final: $SU(3)_c$ y $U(1)_{em}$.

El Lagrangeano más general en una teoría con diversos campos fermiónicos ψ_i y un boson de Higgs, deberá incluir los llamados *términos de interacción de Yukawa*, de la forma

$$\mathcal{L}_Y = y_{ij} \bar{\psi}_i \psi_j \phi \quad (5.1)$$

donde y_{ij} es una matriz de constantes de acoplamiento, llamadas *de Yukawa*. Si hay un SSB, en términos del campo desplazado

$$\eta = \phi - v \quad (5.2)$$

\mathcal{L}_Y inducirá términos de masa para los fermiones:

$$y_{ij} v \bar{\psi}_i \psi_j \quad (5.3)$$

Veamos un ejemplo en el caso abeliano.

5.1. Caso abeliano, simetría local

Supongamos una simetría $U(1)$ que no respete la paridad, bajo la cual los fermiones transformen como

$$\psi_L \rightarrow e^{iq/2}\psi_L ; \quad \psi_R \rightarrow e^{-iq/2}\psi_R \quad (5.4)$$

Esta simetría prohíbe un término de masa de Dirac, $\bar{\psi}_L\psi_R$ ¹. Supongamos que el campo de Higgs tiene el doble de la carga que los fermiones

$$\phi \rightarrow e^{iq}\phi \quad (5.5)$$

y escribamos el Lagrangeano más general con SSB de esta simetría

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi \\ & - y(\bar{\psi}_L\phi\psi_R + \bar{\psi}_R\phi^*\psi_L) - \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi - v^2)^2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde hemos restringido al caso de un solo fermión. Haciendo

$$\phi = \eta + v + iG \quad (5.7)$$

el término de Yukawa queda

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}_L\phi\psi_R + \bar{\psi}_R\phi^*\psi_L \\ = & (\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)(\eta + v) + i(\bar{\psi}_L\psi_R - \bar{\psi}_R\psi_L)G \end{aligned} \quad (5.8)$$

y reescribiendo \mathcal{L} tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{1}{2}\partial_\mu G\partial^\mu G \\ & - m_\psi\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}m_\eta^2\eta^2 - \frac{m_\psi}{v}\bar{\psi}\psi\eta - i\frac{m_\psi}{v}\bar{\psi}\gamma_5\psi G \\ & - \frac{\lambda}{4}(\eta^2 + G^2)(\eta^2 + G^2 + 2\eta v) \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde hemos definido

$$m_\psi \equiv yv ; \quad m_\eta^2 = 2\lambda v^2 \quad (5.10)$$

¹Como hemos argumentado, cualquier simetría interna basada en un grupo de Lie compacto prohíbe un término de masa de Majorana

Hemos pasado de una teoría con fermiones sin masa a una con fermiones masivos que tienen un acoplamiento tipo pseudoescalar con el bosón de Nambu-Goldstone. Esto puede presentar un problema bastante serio: el acoplamiento con una partícula sin masa produce una interacción de alcance infinito entre los fermiones, que puede eventualmente competir con otras interacciones de este tipo, como la gravitatoria por ejemplo. Aún cuando esta interacción sea muy débil, puede llegar a ser importante para un número grande de fermiones como en los objetos astrofísicos.

Caja 5.1: INTERACCIONES CON PSEUDOESCALARES

Una estrella podría, en principio, desintegrarse emitiendo bosones de Nambu-Goldstone. Vamos a ver que esto no sucede. Consideremos fermiones no-relativistas, con

$$m_\phi \gg |\vec{p}_\phi| \quad (5.11)$$

En la base de Dirac, estos fermiones pueden escribirse como

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m} \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 1 \\ \ll 1 \end{pmatrix} u \quad (5.12)$$

y en esta base

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

De modo que el acoplamiento con G producirá un diagrama como el de la figura 5.1. Tenemos

$$\frac{m_\psi}{v} G \bar{\psi} \gamma_5 \psi = \frac{m_\psi}{v} G u^\dagger(\vec{p}') \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}' - \vec{p})}{2m_\psi} \right) u(\vec{p}) \quad (5.14)$$

La interacción depende del spin del fermion. Si tomamos en cuenta un número grande de fermiones, el acoplamiento con G será proporcional al valor medio del spin

$$\frac{1}{v} G \langle \vec{s} \rangle \cdot \vec{q} \quad (5.15)$$

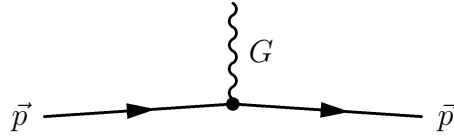


Figura 5.1: Interacción de fermiones con pseudoescalar

Para un sistema grande como una estrella, $\sim 10^{50}$ bariones, $\langle \vec{s} \rangle \sim 0$, los espines se cancelan entre sí. La emisión de bosones de Nambu-Goldstone es despreciable frente a la interacción gravitacional de $\sim 10^{50}$ bariones. Aún así, si existe algún bosón de Nambu-Goldstone (como el axion), las estrellas potencialmente los emiten, y esto se ha usado para poner límites a su posible masa.

Nótese que la asignación de las cargas es importante, si hubiéramos hecho

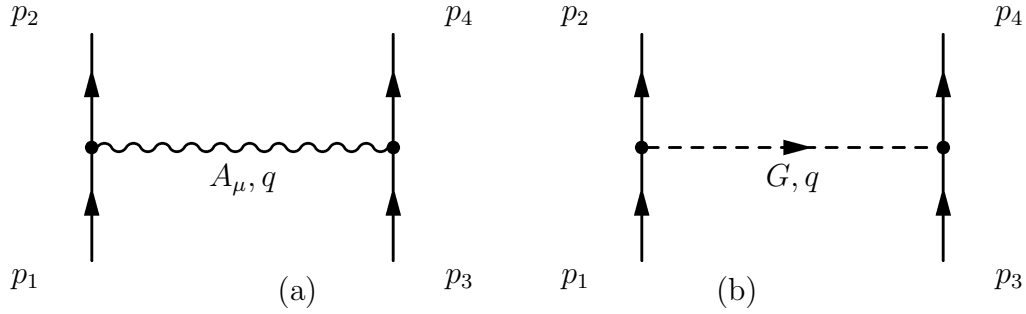
$$Q(\psi_L) = Q(\psi_R) = \frac{1}{2}; \quad Q(\phi) = -1 \quad (5.16)$$

habríamos obtenido un término de masa directo para los fermiones y ninguna interacción de Yukawa. Es así como las simetrías pueden convertirse en un mecanismo para controlar la masa de los fermiones a nuestro gusto.

5.2. Caso abeliano, $U(1)$ local

El caso de $U(1)$ local no agrega mayores complicaciones. En el calibre unitario, puedo hacer desaparecer G , de modo que $\phi = \eta + v$, y sigo obteniendo una masa para los fermiones. Sin embargo, nos ocuparemos por un momento de la invariancia de calibre de los resultados.

Caja 5.2: INVARIANCIA DE CALIBRE-DISPERSIÓN DE FERMIONES

Figura 5.2: Dispersión de fermiones por A_μ y G

Agregamos nuevamente

$$\Delta\mathcal{L}_{\text{calibre}} = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{\xi}gvG + \frac{1}{\sqrt{\xi}}\partial_\mu A^\mu\right)^2 \quad (5.17)$$

de modo que la parte fermiónica de \mathcal{L} queda

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\psi &= i\bar{\psi}_L\gamma^\mu D_\mu\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma^\mu D_\mu\psi_R + y\bar{\psi}_L\phi\psi_R + h.c. \\ &= i\bar{\psi}_L\gamma^\mu(\partial_\mu - i\frac{g}{2}A_\mu)\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma^\mu(\partial_\mu + i\frac{g}{2}A_\mu)\psi_R \\ &\quad + y\bar{\psi}_L\phi\psi_R + h.c. \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi A_\mu + y\bar{\psi}_L\phi\psi_R + h.c. \end{aligned} \quad (5.18)$$

es decir, con $\phi = \eta + v + iG$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\psi &= m_\psi\bar{\psi}\psi + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - g\frac{m_\psi}{m_A}\eta\bar{\psi}\psi \\ &\quad - ig\frac{m_\psi}{m_A}G\bar{\psi}\gamma_5\psi - \frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi A_\mu \end{aligned} \quad (5.19)$$

con

$$m_A = gv ; \quad m_\psi = yv \quad (5.20)$$

Los diagramas que dependen de ξ en una dispersión de fermiones vienen dados por los términos de la última línea de 5.19

Con los propagadores 4.14, 4.15, calculamos las amplitudes

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(a) &= \left(\frac{ig}{2}\right)^2 (\bar{\psi}_1\gamma^\mu\gamma_5\psi_2)(\bar{\psi}_3\gamma^\nu\gamma_5\psi_4) \frac{-i}{k^2 - m_A^2} \left(g_{\mu\nu} + (\xi - 1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi m_A^2}\right) \\ &= \frac{ig^2}{4(k^2 - m_A^2)} (\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi)^2 - \frac{(\xi - 1)(\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2}{(k^2 - m_A^2)(k^2 - \xi m_A^2)} m_\psi^2 \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde hemos usado

$$\not{p}_i \psi = m_\psi \psi ; \quad k = p_1 - p_2 = p_4 - p_3 \quad (5.22)$$

$$\mathcal{M}(b) = \frac{ig^2 m_\psi^2}{m_A^2 (k^2 - m_A^2 \xi)} (\bar{\psi} \gamma_5 \psi)^2 \quad (5.23)$$

De modo que la amplitud total

$$\mathcal{M} = \frac{ig^2}{(k^2 - m_A^2)} \left[\frac{1}{4} (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi)^2 + \frac{m_\psi^2}{m_A^2} (\bar{\psi} \gamma_5 \psi)^2 \right] \quad (5.24)$$

es independiente de ξ . Puede probarse que este resultado es cierto a todos los órdenes en teoría de perturbaciones.

5.3. Caso no-abeliano, simetría local

Tomemos como ejemplo una teoría con simetría $SU(2)$, con campos fermiónicos y un campo de Higgs en la representación fundamental,

$$\Phi' = e^{i\theta_a(x)\sigma^a/2} \Phi \quad (5.25)$$

Si el campo tiene un potencial como 3.34, hemos visto que su vev, que escogeremos

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

rompe completamente la simetría, $\sigma_a \langle \Phi \rangle \neq 0$.

En lugar de 3.33, escribimos Φ en términos del campo η y de tres campos G_a

$$\Phi = e^{iG_a \sigma^a/2} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + v \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

de modo que en el calibre unitario

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + v \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

De las derivadas covariantes se obtienen los términos

$$g^2 A_\mu^a \left[\frac{\sigma_a}{2} \langle \Phi \rangle \right] A^{\mu b} \left[\frac{\sigma_b}{2} \langle \Phi \rangle \right] \quad (5.29)$$

que resultan en términos de masa para los tres bosones de calibre,

$$\frac{g^2 v^2}{4} A_\mu^a A^{\mu a} \quad (5.30)$$

Nótese que no pueden existir términos no-diagonales.

Fermiones

Asignamos propiedades de transformación a los fermiones de tal manera de prohibir un término de masa, pero permitir un término de Yukawa. Esta asignación, como vimos, rompe la paridad. Tomemos el caso de dos fermiones, y digamos

$$\psi_{1R}, \psi_{2R} \quad \text{singletes} \quad (5.31)$$

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_{1L} \\ \psi_{2L} \end{pmatrix} \quad \text{dobletes} \quad (5.32)$$

Luego los términos de Yukawa permitidos serán

$$y_1 (\bar{\psi}_L \Phi \psi_{1R} + h.c.) + y_2 (\bar{\psi}_L \Phi \psi_{2R} + h.c.) \quad (5.33)$$

En el calibre unitario

$$y_1 \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{1L} & \bar{\psi}_{2L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \psi_{1R} = y_1 v \bar{\psi}_{2L} \psi_{1R} \quad (5.34)$$

$$y_2 \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{1L} & \bar{\psi}_{2L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \psi_{2R} = y_2 v \bar{\psi}_{2L} \psi_{2R} \quad (5.35)$$

No parece posible obtener un término de masa para el fermión ψ_1 . Sin embargo, existen otros invariantes de $SU(2)$ que podemos escribir además de [5.33](#), usando la “conjugación de carga” en $SU(2)$. En efecto, nótese que

$$\Phi^T (i\sigma_2) \Phi \quad (5.36)$$

es invariante bajo $SU(2)$. Es usual definir:

$$\tilde{\Phi} = i\sigma_2 \Phi^* \quad (5.37)$$

y tendremos

$$\langle \tilde{\Phi} \rangle = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

De modo que pueden escribirse otros dos términos de Yukawa

$$y_3(\bar{\psi}_L \tilde{\Phi} \psi_{1R} + h.c.) + y_4(\bar{\psi}_L \tilde{\Phi} \psi_{2R} + h.c.) \quad (5.39)$$

y proporcionar masa a todos los fermiones de la teoría.

Caja 5.3: LÍMITE DE GOLDSTONE

Los bosones de Nambu-Goldstone se transforman, en el caso de una simetría local, en grados de libertad para los bosones de calibre que se vuelven masivos. Claramente, en una situación donde la constante de calibre pueda despreciarse,

$$g \rightarrow 0 \quad (5.40)$$

deberíamos recuperar los bosones sin masa de N-G. Tomando en cuenta 5.20, podemos reescribir la amplitud para la dispersión fermión-fermión

$$\mathcal{M} = \frac{ig^2}{(k^2 - g^2v^2)} \left[\frac{1}{4}(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)^2 + \frac{m_\psi^2}{g^2v^2}(\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 \right] \quad (5.41)$$

Cuando $g \rightarrow 0$

$$\mathcal{M} = \frac{m_\psi^2}{v^2}(\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 \frac{1}{k^2} \quad (5.42)$$

que es la que resultaría de acoplar $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ con un campo con propagador $1/k^2$: acoplamiento tipo axial con un pseudovector de masa 0. Ha reaparecido el bosón de Nambu-Goldstone. (O los bosones, cada gráfico debe repetirse, por cada generador roto)

Problema 10

Explique por que no se incluyen términos del tipo $\Phi^\dagger \sigma_a \Phi \Phi^\dagger \sigma^a \Phi$ en el potencial (3.34) para un doblete de $SU(2)$

Problema 11

Rellene los pasos intermedios que conducen a (5.24).

Problema 12

Tome el doblete de Higgs con vev en la dirección

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Demuestre que se encuentra el mismo patrón para las masas de los bosones y de los fermiones de la teoría que con la dirección que hemos escogido en el texto

Capítulo 6

$$\begin{aligned} SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y &\rightarrow \\ SU(3)_c \times U(1)_{em} \end{aligned}$$

Ya tenemos todos los elementos para construir el modelo estándar. Comenzamos incluyendo únicamente la primera familia de fermiones.

6.1. Campos

El grupo de invariancia de la teoría será $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times \Lambda$. Las propiedades de transformación de los objetos de la teoría pueden resumirse como

- Poincaré: representaciones espinoriales quirales, $\psi_{L(R)} = (1 \pm \gamma_5)/2\psi$, para los fermiones; bosones vectoriales para los campos de calibre. Los invariantes son los de la tabla 1.1.
- $SU(3)$: representación fundamental, únicamente para los quarks, los demás campos son singletes, a excepción de los 8 gluones G_μ , bosones de calibre en la representación adjunta. Posibles invariantes

$$\bar{q}^\alpha q_\alpha ; \quad \bar{q}^\alpha \gamma_5 q_\alpha ; \quad \bar{q}^\alpha \gamma^\mu D_\mu q_\alpha \quad (6.1)$$

- $SU(2)_L$: representación fundamental, únicamente para los fermiones ψ_L ; fermiones ψ_R serán singletes; 3 campos de calibre W_μ en la representación adjunta. Posibles invariantes

$$i\psi_L \gamma^\mu D_\mu \psi_L ; \quad i\psi_R \gamma^\mu D_\mu \psi_R \quad (6.2)$$

Las masas de Dirac no están permitidas, pero si tenemos alguna partícula neutra podemos en principio escribir una masa de Majorana.

- $U(1)_Y$: 1 bosón e calibre neutro B_μ , las demás partículas tendrán cargas asignadas en función de la electromagnética Q y el número cuántico T_{3L} de $SU(2)$

$$Y = 2(Q - T_{3L}) \quad (6.3)$$

y los invariantes posibles son todas las combinaciones neutras.

Es decir, tomando sólo la primera familia, la teoría estará compuesta por los campos:

	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$Y/2$
e_R	S	S	-1
u_R	F	S	2/3
d_R	F	S	-1/3
ℓ_R	S	F	-1/2
q_R	F	F	1/6
G_μ	A	S	0
W_μ	S	A	0
B_μ	S	S	0

donde S= singlete, F=fundamental, A=adjunta.

Adicionalmente, tenemos que proponer un bosón de Higgs. Como no podemos escribir términos de masa directos para los fermiones, éstos tendrán que ser inducidos por el vev. Como vimos en el capítulo anterior, para ello necesitamos un Higgs que transforme como doblete de $SU(2)$,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

y es fácil ver que tiene que tener hipercarga

$$Y(\Phi) = 1 \quad (6.5)$$

para poder escribir, por ejemplo, $\bar{\ell}_L \Phi e_R$. Luego, $\tilde{\Phi} = i\sigma_2 \Phi^*$ tendrá $Y(\tilde{\Phi}) = -1$.

Veamos entonces cuáles invariantes podemos escribir con estos campos.

6.2. Invariantes

Términos cinéticos

Las derivadas covariantes de campos en la representación fundamental serán

$$\begin{aligned}
 SU(3)_c &\rightarrow D_\mu = \partial_\mu - i c G_\mu^a \frac{\lambda_a}{2} \\
 SU(2)_L &\rightarrow D_\mu = \partial_\mu - i g W_\mu^i \frac{\sigma_i}{2} \\
 U(1)_Y &\rightarrow D_\mu = \partial_\mu - i g' \frac{Y}{2} B_\mu
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

con $a = 1, 8$ e $i = 1, 3$. Tendremos entonces, para el Higgs:

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu - i g W_\mu^i \frac{\sigma_i}{2} - i g' \frac{1}{2} B_\mu) \Phi \tag{6.7}$$

Para las partículas izquierdas:

$$\begin{aligned}
 D_\mu q_L &= (\partial_\mu - i c G_\mu^a \frac{\lambda_a}{2} - i g W_\mu^i \frac{\sigma_i}{2} - i g' \frac{1}{6} B_\mu) q_L \\
 D_\mu \ell_L &= (\partial_\mu - i g W_\mu^i \frac{\sigma_i}{2} + i g' \frac{1}{2} B_\mu) \ell_L
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Para las derechas:

$$\begin{aligned}
 D_\mu u_R &= (\partial_\mu - i c G_\mu^a \frac{\lambda_a}{2} - i g' \frac{4}{6} B_\mu) u_R \\
 D_\mu d_R &= (\partial_\mu - i c G_\mu^a \frac{\lambda_a}{2} + i g' \frac{2}{6} B_\mu) d_R \\
 D_\mu e_R &= (\partial_\mu - i g W_\mu^i \frac{\sigma_i}{2} + i g' B_\mu) e_R
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

En adelante no escribiremos los términos de calibre de $SU(3)_C$. Para cada familia de bosones de calibre, definiremos los términos correspondientes

$$F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a ; F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \tag{6.10}$$

que incluirá, en el caso no abeliano, términos de interacción entre los bosones. Los denotaremos $G_{\mu\nu}$ (para $SU(3)_C$), $W_{\mu\nu}$ (para $SU(2)_L$) y $B_{\mu\nu}$ (para $U(1)_Y$).

Términos de masa

Lo términos de Dirac

$$\bar{\psi}_L \psi_R ; \quad \bar{\psi}_R \psi_L \quad (6.11)$$

están prohibidos por $SU(2)_L \times U(1)_Y$, mientras que

$$\bar{\psi}_R \psi_R \quad (6.12)$$

están prohibidos por la simetría de Lorentz y las posibles masas de Majorana

$$\psi_R^T C \psi_R \quad (6.13)$$

están prohibidas por $U(1)_Y$. El único campo que puede tener masa es el bosón de Higgs, pero

$$m_\Phi^2 \Phi^\dagger \Phi \quad (6.14)$$

tendrá el signo equivocado, para romper la simetría, y no es realmente una masa física. Y la simetría de calibre prohíbe los términos de masa de los campos de calibre. *No hay términos de masa* en el Lagrangeano escrito en estos campos.

Términos de Yukawa

Los quarks y leptones son fundamentalmente distinguidos por $SU(3)$. Éste es el origen de la conservación de dos números cuánticos: B , número bariónico, tal que $B(q) = 1/3, B(\ell) = 0$, y L , número leptónico, tal que $L(q) = 0, L(\ell) = 1$. En otras palabras, no tendremos interacciones quark-lepton, no sería posible escribir un invariante de $SU(3)$ con ellos.

Tendremos, para los quarks ($\alpha = 1..,3$ de $SU(3)$):

$$y_d \bar{q}_L^\alpha \Phi d_{R\alpha} + h.c. ; \quad y_u \bar{q}_L^\alpha \tilde{\Phi} u_{R\alpha} + h.c. \quad (6.15)$$

y para los leptones, únicamente

$$y_e \bar{\ell}_L \Phi e_R + h.c. \quad (6.16)$$

Potencial de Higgs

Las únicas otras interacciones permitidas son las autointeracciones del campo de Higgs. Escogeremos los parámetros del potencial más general posible de modo que ocurra SSB

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger\Phi - v^2)^2 \quad (6.17)$$

y llamaremos $m_\Phi^2 = \lambda v^2$

El Lagrangeano del Modelo Estándar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SM} = & -\frac{1}{4}(W_i^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^i + G_a^{\mu\nu}G_{\mu\nu}^a + B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi) \\ & + i\bar{\ell}_L\gamma^\mu D_\mu\ell_L + i\bar{q}_L^\alpha\gamma^\mu D_\mu q_{L\alpha} + i\bar{u}_R^\alpha\gamma^\mu D_\mu u_{R\alpha} + i\bar{d}_R^\alpha\gamma^\mu D_\mu d_{R\alpha} + i\bar{e}_R\gamma^\mu D_\mu e_R \\ & + (y_d\bar{q}_L^\alpha\Phi d_{R\alpha} + y_u\bar{u}_L^\alpha\tilde{\Phi} u_{R\alpha} + y_e\bar{\ell}_L\Phi e_R + h.c.) - V(\Phi^\dagger\Phi) \end{aligned} \quad (6.18)$$

6.3. Rompimiento de la simetría

De acuerdo con la asignación 6.3, las componentes con $T_{3L} = -1/2$ del campo de Higgs 6.4

$$\phi_3 + i\phi_4 \quad (6.19)$$

tendrán $Q = 0$. Podemos escoger el vev de Φ en esa dirección sin pérdida de generalidad ¹, de modo que se preserve el generador del grupo $U(1)$ del electromagnetismo. Con

$$\langle\Phi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} T_{iL}\langle\Phi\rangle &= \frac{\sigma_i}{2}\langle\Phi\rangle \neq 0 \\ \frac{Y}{2}\langle\Phi\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\langle\Phi\rangle \neq 0 \end{aligned} \quad (6.21)$$

¹Una escogencia distinta equivaldría a una redefinición de Q

Todos los generadores están “rotos”. Sin embargo, una combinación lineal de estos generadores

$$Q\langle\Phi\rangle = (T_{3L} + \frac{Y}{2})\langle\Phi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \langle\Phi\rangle = 0 \quad (6.22)$$

aniquila el vacío. Es el generador de la simetría que sobrevive, la del electromagnetismo. Hemos logrado romper

$$\begin{aligned} SU(2)_L \times U(1)_Y &\rightarrow U(1)_{em} \\ 3gen. + 1gen. &\rightarrow 1gen. \end{aligned} \quad (6.23)$$

por tanto tenemos

3 gen. rotos = 3 bosones de calibre masivos
1 gen. que aniquila el vacío = 1 bosón de calibre sin masa: el fotón

Para identificar estos bosones, basta mirar el término cinético de Φ , e identificar los bosones de calibre que adquieren una masa (recordando que ésta es invariante de calibre).

Definimos como siempre

$$W_\mu^a T_a = W^+ \sigma^+ + W^- \sigma^- + W^3 \sigma^3 \quad (6.24)$$

y calculamos

$$\begin{aligned} D_\mu \langle\Phi\rangle &= + \left(-igW_\mu^i \frac{\sigma_i}{2} - ig' \frac{1}{2} B_\mu \right) \langle\Phi\rangle \\ &= -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} gW_\mu^3 + g'B_\mu & g\sqrt{2}W_\mu^+ \\ g\sqrt{2}W_\mu^- & -gW_\mu^3 + g'B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\ &= -\frac{i}{2} v \begin{pmatrix} g\sqrt{2}W_\mu^+ \\ -gW_\mu^3 + g'B_\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.25)$$

La combinación $-gW_\mu^3 + g'B_\mu$ se denomina usualmente Z_μ , y se escribe en términos de θ_W , el ángulo débil, definido por

$$\tan \theta_W \equiv \frac{g'}{g} \quad (6.26)$$

como

$$\begin{aligned} Z_\mu &\equiv gW_\mu^3 - g'B_\mu \\ &= \sqrt{g^2 + g'^2} (W_\mu^3 \cos \theta_W - B_\mu \sin \theta_W) \end{aligned} \quad (6.27)$$

Luego, el término cinético contendrá los términos de masa

$$|D_\mu \langle \Phi \rangle|^2 = v^2 \frac{g^2}{4} 2W_\mu^+ W_\mu^- + v^2 \frac{g^2}{4 \cos^2 \theta_W} Z^\mu Z_\mu. \quad (6.28)$$

Tenemos entonces que la combinación ortogonal a Z_μ

$$A_\mu \equiv \sqrt{g^2 + g'^2} (W_\mu^3 \sin \theta_W + B_\mu \cos \theta_W) \quad (6.29)$$

no tendrá masa, y será precisamente el fotón. Resumiendo, se obtiene como resultado de SSB

	Q	m^2
A_μ	0	$m_A^2 = 0$
Z_μ	0	$m_Z^2 = v^2 g^2 / 4 \cos^2 \theta_W$
W_μ^\pm	± 1	$m_W^2 = g^2 v^2 / 4$

6.4. Corrientes neutras

La teoría $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$ para una sola familia que hemos contruido contiene las interacciones débiles observadas con los bosones cargados W_μ^\pm , y el electromagnetismo. Pero tenemos un bosón nuevo, Z_μ^0 . Para el momento en que se desarrolló el modelo estándar, las corrientes neutras en las interacciones débiles no se habían observado, y su descubrimiento constituyó una demostración espectacular de su validez.

El acoplamiento de fermiones con los bosones neutros es

$$\mathcal{L}_\psi^0 = \bar{\psi} \gamma^\mu \left(\frac{g}{2} \sigma_3 W_\mu^3 + \frac{g'}{2} Y B_\mu \right) \psi \quad (6.30)$$

Ahora usando

$$W^3 = A \sin \theta_W + Z \cos \theta_W ; \quad B = A \cos \theta_W - Z \sin \theta_W \quad (6.31)$$

y definiendo

$$e \equiv g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W \quad (6.32)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\psi^0 &= A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \left(\frac{\sigma_3}{2} + \frac{Y}{2} \right) e\psi \\ &+ Z_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \left(\cos^2 \theta_W \frac{\sigma_3}{2} - \sin^2 \theta_W \frac{Y}{2} \right) \end{aligned} \quad (6.33)$$

El primer término no es más que la interacción electromagnética, ya que el generador entre paréntesis no es otro que Q . Tenemos además la interacción

$$\mathcal{L}_Z = \frac{g}{\cos \theta_W} Z_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu (T_{3L} - Q \sin^2 \theta_W) \psi = \frac{g}{\cos \theta_W} Z_\mu J^{\mu 0} \quad (6.34)$$

que sentirán *todos los fermiones cargados*, transformen o no bajo $SU(2)_L$.

Las primeras predicciones del modelo son entonces

- existencia de corrientes neutras $J^{\mu 0}$
- existencia de un bosón de calibre neutro, Z_μ , con masa

$$m_Z = \frac{1}{\cos \theta_W} m_W$$

La detección de las corrientes neutras permite medir θ_W en diversos procesos de dispersión de 4 fermiones. También se determinó la masa del bosón Z , y se tiene

$$\begin{aligned} m_W &= 80 GeV \\ m_Z &= 90 GeV \\ \sin^2 \theta_W &= 0,23 \end{aligned} \quad (6.35)$$

que como puede verse constituye un éxito de la teoría.

6.5. Masas de fermiones

Los términos de masa de los fermiones, en el caso de una sola familia, son muy simples y provienen de los tres términos de Yukawa

$$y_e v \bar{e}_L e_R + y_d v \bar{d}_L d_R + y_u v \bar{u}_L u_R + h.c. \quad (6.36)$$

No hay masa para el neutrino. La inclusión de las otras familias, sin embargo, complica considerablemente estos términos, pero permite dar cuenta de la característica de las interacciones débiles que aún nos queda por explicar: las interacciones débiles de los quarks mezclan las familias, las los leptones no.

Caja 6.1: BÚSQUEDA DEL HIGGS

El mismo término de Yukawa que da masa a los fermiones proporciona la interacción con el campo de Higgs, que hemos llamado η , luego tendremos

$$\mathcal{L}_Y = g \frac{m_f}{\sqrt{2}M_W} \eta \bar{f} f \equiv h_f \eta \bar{f} f \quad (6.37)$$

Para la primera familia, con masas del orden de MeV, la constante de acoplamiento h_f es del orden 10^{-4} , lo que hace difícil observar el Higgs en colisiones electron-positron (e^+e^-).

Pero el Higgs también interactúa con los campos de calibre. Por ejemplo el término

$$\frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} M_Z Z_\mu Z^\mu \eta \quad (6.38)$$

contribuye al diagrama e^+e^- de la figura 6.1

Procesos como éste, que pueden ser observados por ejemplo en LEP, combinados con datos de tests de alta precisión, donde se estudian correcciones a 2 loops al potencial efectivo del Higgs, permiten acotar

$$100\text{GeV} \leq m_H \leq 200\text{GeV} \quad (6.39)$$

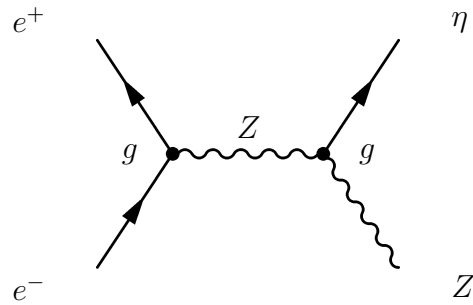


Figura 6.1: Producción de Higgs en e^+e^-

Problema 13

Tome el doblete de Higgs con v_{ev} en la dirección

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

con $v^2 = v_1^2 + v_2^2$. Demuestre que hay un bosón de calibre sin masa (el fotón), uno neutro con masa (el Z) y dos cargados (W^\pm). Encuentre los autoestados y sus masas, demostrando que los resultados físicos son independientes de la dirección del v_{ev} .

Problema 14

Calcule las interacciones cúbicas y cuárticas de los bosones de calibre. Muestre que no hay términos de autointeracción de los fotones y Z , explique por qué era de esperarse

Capítulo 7

Familias de fermiones

Como resultado del SSB, tenemos las siguientes corrientes de fermiones

$$J_\mu^+ = \bar{\nu}_L \gamma_\mu e_L + \bar{u}_L \gamma_\mu d_L \quad (7.1)$$

$$J_\mu^0 = \sum_f \bar{f} \gamma_\mu (T_{3L} - Q \sin^2 \theta_W) f \quad (7.2)$$

$$J_\mu^{em} = \sum_f \bar{f} \gamma_\mu Q f \quad (7.3)$$

donde hasta ahora $f = e_L, e_R, \nu_L, d_L, d_R, u_L, u_R$.

Los términos de masa que permite la simetría son diagonales

$$y_i \bar{f}_i f_i \quad (7.4)$$

pero evidentemente, esto cambiará al introducir las otras dos familias, que replican los números cuánticos de la primera

$$q_{Li} : \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

$$\ell_{Li} : \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \nu_L^\mu \\ \mu_L \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \nu_L^\tau \\ \tau_L \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

$$u_{Ri} : u_R ; c_R ; t_R \quad (7.7)$$

$$d_{Ri} : d_R; s_R; b_R \quad (7.8)$$

$$e_{Ri} : e_R; \mu_R; \tau_R \quad (7.9)$$

donde hemos introducido un índice de familias o generaciones, $i = 1, 2, 3$. Las constantes de Yukawa serán ahora matrices en el espacio de familias, y son a priori completamente arbitrarias. Tendremos tres tipos de términos

$$(y_e)_{ij} v \bar{\ell}_{Li} \Phi e_{Rj} + h.c. \quad (7.10)$$

$$(y_d)_{ij} v \bar{q}_{Li} \Phi d_{Rj} + h.c. \quad (7.11)$$

$$(y_u)_{ij} v \bar{q}_{Li} \tilde{\Phi} u_{Rj} + h.c. \quad (7.12)$$

En cambio, los términos cinéticos se escriben, por ejemplo

$$\bar{e}_{Ri} \gamma^\mu D_\mu e_{Ri} \quad (7.13)$$

las interacciones con bosones de calibre no mezclan las familias. Así, la expresión para las corrientes 7.3 se extiende trivialmente al caso de tres familias.

Ahora bien, cuando queremos calcular procesos físicos, nos referimos siempre a estados que sean autoestados de masa, partículas con masa definida. En el modelo estándar con más de una familia tenemos

Autoestados de masa \neq Autoestados de interacción

Nos interesará trabajar en la base en que los campos sean autoestados de masa –tendremos interacciones entre familias.

7.1. Caso bifamiliar

El mundo era sencillo con sólo dos familias. Llamemos a los campos originales, autoestados de interacción

$$\ell_{1L}^0, \ell_{2L}^0; q_{1L}^0, q_{2L}^0 \quad (7.14)$$

$$e_R^0, \mu_R^0; d_R^0, s_R^0; u_R^0, c_R^0 \quad (7.15)$$

y llamaremos colectivamente $\mu_R^0 = e_{2R}^0$, etc. Tendremos 3 matrices de masa en el espacio de familias,

$$M_e^{ij} = y_e^{ij} v \quad M_d^{ij} = y_d^{ij} v \quad M_u^{ij} = y_u^{ij} v \quad (7.16)$$

con $i = 1, 2$, complejas y arbitrarias. Las combinaciones

$$M_f^\dagger M_f ; \quad M_f M_f^\dagger \quad (7.17)$$

son dos matrices hermiticas distintas para cada $f = e, u, d$. Podemos diagonalizarlas con una matriz unitaria para cada combinación, así

$$D_f^2 = \begin{pmatrix} m_{f1}^2 & \\ & m_{f2}^2 \end{pmatrix} = U_{fL}^\dagger M_f M_f^\dagger U_{fL} = U_{fR}^\dagger M_f^\dagger M_f U_{fR} \quad (7.18)$$

Es decir

$$D_f = \begin{pmatrix} m_{f1} & \\ & m_{f2} \end{pmatrix} = U_{fL}^\dagger M_f U_{fR} \quad (7.19)$$

se necesitan dos matrices *distintas* para diagonalizar cada matriz de masa. Los autovectores en la base donde las matrices de masa son diagonales se encuentran transformando independientemente los estados derechos e izquierdos:

$$(f_L)_i = (U_{fL}^\dagger)_{ij} (f_L^0)_j \quad (7.20)$$

$$(f_R)_i = (U_{fR}^\dagger)_{ij} (f_R^0)_j \quad (7.21)$$

Tenemos entonces 6 matrices unitarias distintas, explícitamente, en el espacio de familias, el cambio de base es

$$\begin{pmatrix} e \\ \mu \end{pmatrix}_{L,R}^0 = U_{L,R}^e \begin{pmatrix} e \\ \mu \end{pmatrix}_{L,R} \quad (7.22)$$

$$\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_{L,R}^0 = U_{L,R}^d \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_{L,R} \quad (7.23)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}_{L,R}^0 = U_{L,R}^u \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}_{L,R} \quad (7.24)$$

Cómo quedan las interacciones en la base de los autoestados de masa? Veamos primero las corrientes neutras, como la electromagnética

$$\begin{aligned}
J_\mu^{em} &= \sum_f \bar{f}^0 \gamma_\mu Q f^0 \\
&= \sum_f \bar{f}_L^0 \gamma_\mu Q f_L^0 + \bar{f}_R^0 \gamma_\mu Q f_R^0 \\
&= \sum_f \bar{f}_L U_{fL}^\dagger \gamma_\mu Q U_{fL} f_L + \bar{f}_R U_{fR}^\dagger \gamma_\mu Q U_{fR} f_R \\
&= \sum_f \bar{f} \gamma_\mu Q f
\end{aligned} \tag{7.25}$$

debido a que las partículas de cada familia tienen todas cargas distintas. Lo mismo sucede con la corriente débil neutra, ya que tiene una expresión similar, sólo Q se reemplaza por $T_{3L} - Q \sin^2 \theta_W$. Vemos que *las corrientes neutras no mezclan las familias*.

La situación es muy distinta en las corrientes cargadas que dan las interacciones con W_μ^\pm . Tomemos primero la corriente de quarks

$$\begin{aligned}
J_{\mu q}^+ &= \bar{u}_L^0 \gamma^\mu d_L^0 + \bar{c}_L^0 \gamma^\mu s_L^0 \\
&= \begin{pmatrix} \bar{u}_L^0 & \bar{c}_L^0 \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_L^0 \\ s_L^0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{c}_L \end{pmatrix} U_{uL}^\dagger \gamma^\mu U_{dL} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Definiendo la matriz unitaria

$$V \equiv U_{uL}^\dagger U_{dL} \tag{7.27}$$

escribimos la interacción en la base de los autoestados de masa como

$$\frac{g}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{c}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu V \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix} \right] W_\mu^+ \tag{7.28}$$

de modo que los bosones cargados sí mezclan las familias.

En el sector leptónico, podemos razonar exactamente igual. La corriente leptónica es

$$\begin{aligned}
J_{\mu \ell}^+ &= \begin{pmatrix} \bar{\nu}_{eL}^0 & \bar{\nu}_{\mu L}^0 \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} e_L^0 \\ \mu_L^0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \bar{\nu}_{eL} & \bar{\nu}_{\mu L} \end{pmatrix} \gamma^\mu U_{eL} \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7.29}$$

Pero la situación es muy distinta, debido a que los neutrinos no tienen masa, y por tanto no aparecen sino en los términos de interacción. Podemos rotarlos impunemente con la matriz de los electrones, definiendo

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \end{pmatrix} = U_{eL}^\dagger \begin{pmatrix} \nu_{eL}^0 \\ \nu_{\mu L}^0 \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

de modo que la corriente leptónica escrita en los autotestados de masa, sigue siendo diagonal en familias.

$$J_{\mu\ell}^+ = \left(\bar{\nu}_{eL} \quad \bar{\nu}_{\mu L} \right) \gamma^\mu \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

Encontramos así que el modelo estándar para dos familias reproduce precisamente el resultado que queríamos: sólo los quarks se mezclan, y sólo en las corrientes cargadas. Podemos hacerlo aún mejor, y reescribir las interacciones en términos del ángulo de Cabibbo definido en el capítulo 2. Para ello, nótese que V es unitaria y por tanto podemos escribirla en términos de cuatro parámetros: un ángulo de rotación y tres fases

$$V = e^{i\gamma} \begin{pmatrix} \cos \theta e^{i\alpha} & \sin \theta e^{i\beta} \\ -\sin \theta e^{i\beta} & \cos \theta e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

La fase global puede siempre eliminarse redefiniendo W_μ^\pm . Las interacciones 7.28 quedan

$$\begin{aligned} & \left[\bar{u}_L \gamma^\mu d_L \cos \theta e^{i\alpha} + \bar{u}_L \gamma^\mu s_L \sin \theta e^{i\beta} \right. \\ & \left. - \bar{c}_L \gamma^\mu d_L \sin \theta e^{-i\beta} + \bar{c}_L \gamma^\mu c_L \cos \theta e^{-i\alpha} \right] W_\mu^+ \end{aligned} \quad (7.33)$$

Pero tenemos aún una libertad en la definición de los estados. Los términos de masa

$$m_q \bar{q}_L q_R \quad (7.34)$$

no cambian si rotamos q_R y q_L por la misma fase. Tenemos 4 quarks, y tomando en cuenta que una fase global no tiene sentido físico, disponemos de 3 fases con las que jugar. Escogiendo convenientemente

$$d' = e^{i\alpha} d; \quad s' = e^{i\beta} s; \quad c' = e^{i(\alpha+\beta)} \quad (7.35)$$

Obtenemos finalmente

$$\frac{g}{\sqrt{2}} \left[\left(\bar{u}_L \quad \bar{c}_L \right) \gamma^\mu \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix} \right] W_\mu^+ \quad (7.36)$$

Hemos obtenido así el término

$$\bar{u}\gamma^\lambda(1 - \gamma_5)d_\theta W_\lambda^+ ; \quad d_\theta = \cos(\theta_c)d + \sin(\theta_c)s \quad (7.37)$$

observado en los decaimientos de partículas con extrañeza. Es importante señalar que es el ángulo de Cabibbo, medido experimentalmente, el que da una primera idea de la estructura de la segunda familia. Si no fuera por él, no habría razón para suponer que las nuevas partículas (μ, c, s) forman una familia con la misma estructura $SU(2)$ que la primera.

7.2. Mecanismo GIM

El quark s fue el primer quark de la segunda familia en descubrirse. Hasta 1974, se podía haber supuesto que la estructura $SU(2)$ de los quarks era del tipo

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_{L\theta} \end{pmatrix} ; \quad s_{L\theta} \quad (7.38)$$

con

$$d_\theta = d \cos \theta_C + s \sin \theta_C ; \quad s_\theta = s \cos \theta_C - d \sin \theta_C \quad (7.39)$$

Si este fuera el caso, tendríamos para las corrientes neutras

$$J_\mu^0 = \bar{d}_{L\theta}\gamma_\mu d_{L\theta} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W\right) + s_{L\theta}\gamma_\mu s_{L\theta} \left(\frac{1}{3} \sin^2 \theta_W\right) \quad (7.40)$$

Es decir

$$\begin{aligned} J_\mu^0 = & \bar{d}_L\gamma_\mu d_L \left(-\frac{1}{2} \cos^2 \theta_C + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W\right) + \bar{s}_L\gamma_\mu s_L \left(-\frac{1}{2} \sin^2 \theta_C + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W\right) \\ & - \frac{1}{2} \sin \theta_C \cos \theta_C (\bar{d}_L\gamma_\mu s_L + \bar{s}_L\gamma_\mu d_L) \end{aligned} \quad (7.41)$$

El último término produce mezcla de familias a través de una corriente neutra, y como hemos dicho, esto no es lo que se observa. Únicamente las corrientes cargadas mezclan familias.

Para eliminar éste término, basta con suponer que s_L no es un singlete de $SU(2)$, sino que junto con otro quark, el c_L , forman un doblete

$$\begin{pmatrix} c_L \\ s_{L\theta} \end{pmatrix} \quad (7.42)$$

Esto fue lo que propusieron Glashow, Iliopoulos y Maiani. El mecanismo, que pasó a llamarse GIM, logra eliminar el término gracias a la existencia de un quark aún no descubierto. Su predicción fue un gran éxito del modelo. Además, no sólo se puede predecir la existencia de c , sino su masa, a partir de la amplitud medida en el decaimiento de los mesones K .

7.3. 3 familias

Hasta ahora, tenemos las siguientes predicciones, corroboradas experimentalmente

1. los leptones no se andan mezclando con gente de otra familia
2. las corrientes neutras no mezclan familias
3. las corrientes cargadas sí lo hacen

Tenemos además que la matriz V es *real*. Esto implica que los acoplamientos son reales, y como consecuencia, el Lagrangeano conserva CP. Las predicciones 1), 2) y 3) se mantienen cuando incluimos la tercera familia, porque se basan en la estructura $SU(2)$, y la tercera familia será una copia en $SU(2)$ de las anteriores. Pero ahora V no será real, ni podrá ser parametrizada por un sólo ángulo, y tendremos la importantísima predicción de la violación de CP en el modelo estándar.

El problema es determinar cuántos parámetros deberá tener la matriz V , una matriz unitaria de dimensión N =número de familias. Podemos pensarla como una matriz ortogonal, parametrizada por los ángulos de Euler, con fases adicionales. Tendremos en total N^2 parámetros, sin contar una fase global, luego

$$N^2 \text{ parámetros} = N(N - 1)/2 \text{ ángulos de Euler} + N(N + 1)/2 \text{ fases.}$$

y tendremos $2N$ quarks en total, cuyas $2N - 1$ fases (descontando la fase global) podemos redefinir. Entonces

$$N(N + 1)/2 - (2N - 1) = (N - 2)(N - 1)/2 \text{ fases físicas}$$

Para 1 o dos familias, todas las fases se pueden eliminar. Para 3 o más, aparecen fases físicas que producirán acoplamientos complejos, y violación de CP.

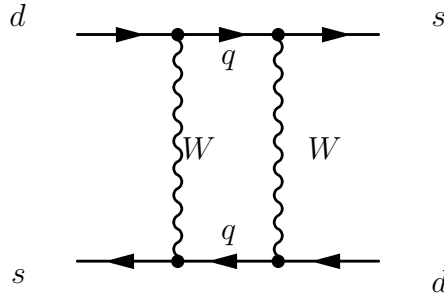


Figura 7.1: Diagrama a 1-loop para el cálculo del Hamiltoniano efectivo del sistema K^0, \bar{K}^0

En 1973, Kobayashi y Maskawa propusieron explicar las observaciones de violación de CP en el decaimiento de los mesones K postulando una tercera familia, hoy en día descubierta en su totalidad. La matriz V se llama por ello V_{CKM} : Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Una parametrización usual es

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ -s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}s_{13} \end{pmatrix} \quad (7.43)$$

donde

$$c_{ij} = \cos \theta_{ij} ; s_{ij} = \sin \theta_{ij} \quad (7.44)$$

y θ_{ij} son los tres ángulos de Euler.

Caja 7.1: VIOLACIÓN DE CP EN $K\bar{K}$

El mesón neutro K^0 es un estado formado por $\bar{d}s$. Diagramas como el de la figura (7.1) producen un Hamiltoniano efectivo para

los estados K^0 y \bar{K}^0 , que es el estado CP -conjugado correspondiente. Sus elementos de matriz

$$\langle \alpha' | H_{\text{eff}} | \alpha \rangle \quad (7.45)$$

serán reales en el caso de dos generaciones de quarks, donde, como hemos visto, las interacciones no contienen fases físicas. El Hamiltoniano efectivo conserva CP y contiene los términos de masa

$$m_K(K^0 K^0 + \bar{K}^0 \bar{K}^0) + 2\delta m_K K^0 \bar{K}^0 \quad (7.46)$$

Diagonalizando la matriz de masas

$$\begin{pmatrix} m_K & \delta m_K \\ \delta m_K & m_K \end{pmatrix} \quad (7.47)$$

obtenemos los autoestados

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 + \bar{K}^0); \quad K_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 - \bar{K}^0) \quad (7.48)$$

con masas

$$m_1 = m_K + \delta m_K; \quad m_2 = m_K - \delta m_K \quad (7.49)$$

respectivamente. En el caso de dos generaciones, los quarks que corren en el loop de la figura 7.1 son u y c . Se puede calcular entonces la diferencia de masas

$$\frac{\delta m_K}{m_K} = \frac{g^4}{16\pi^2} \left(\sin 2\theta \frac{m_c^2 - m_u^2}{M_W^2} \right)^2 \left(\frac{m_K}{M_W} \right)^2 \quad (7.50)$$

Esta resulta ser muy pequeña. Con

$$m_c \sim 1,5\text{GeV}; \quad m_u \sim 10\text{MeV} \quad (7.51)$$

se obtiene

$$\frac{\delta m_K}{m_K} \simeq 10^{-13} \quad (7.52)$$

que está de acuerdo con lo medido experimentalmente.

Como sabemos, sin embargo, existen 3 generaciones y el Lagrangeano no conserva CP . El diagrama que da el elemento de matriz efectivo $\langle K^0 | H_{\text{eff}} | \bar{K}^0 \rangle$ será proporcional a

$$V_{ts}^2 V_{td}^{*2} \quad (7.53)$$

mientras que el diagrama que da $\langle \bar{K}^0 | H_{\text{eff}} | K^0 \rangle$ será proporcional a

$$V_{td}^2 V_{ts}^{*2} \quad (7.54)$$

que no es igual al anterior, por la presencia de la fase δ .

La matriz de masas en este caso luce como

$$\begin{pmatrix} m_K & \delta m_K(1 + \epsilon) \\ \delta m_K(1 - \epsilon) & m_K \end{pmatrix} \quad (7.55)$$

Y los autoestados de masa

$$K_S = K_2 + \epsilon K_1; \quad K_L = K_1 + \epsilon K_2 \quad (7.56)$$

ya no son autoestados del operador CP . El parámetro ϵ es la medida de violación de CP en este sistema, y puede escribirse en términos de los elementos de matriz V_{CKM} como

$$\epsilon = \sin \theta_{12} \sin \theta_{13} \sin \theta_{23} \delta \quad (7.57)$$

Es muy pequeño, aproximadamente $\epsilon \sim 10^{-3}$.

Problema 15

Demuestre que la matriz V_{CKM} en la parametrización (7.43) es unitaria. Demuestre que la fase δ implica violación de CP

Problema 16

Suponga que las masas de una de las especies de quarks (up o down) están degeneradas. Demuestre que V_{CKM} no tiene significado físico (es proporcional a la identidad)

Capítulo 8

Neutrinos

El modelo estándar, por construcción, no admite términos de masa para los neutrinos. En ausencia de ν_R , todos los términos de masa están prohibidos por la simetría. Esto se debe, claro está, a que en los procesos observados el neutrino se comporta precisamente como una partícula sin masa. Sin embargo, incluso desde que se postuló la existencia de ν_e , se ha jugado con la posibilidad de que los neutrinos tengan una masa pequeña, y de hecho los experimentos sólo pueden darnos un límite superior a la masa.

Como vimos en capítulo anterior, la ausencia de términos de masa para el neutrino es lo que hace que los leptones no se mezclen entre familias, como sucede con los quarks. Esto sugiere que una manera indirecta de demostrar si los neutrinos tienen una masa, aunque sea demasiado pequeña para ser detectada directamente, es examinar procesos donde podrían ocurrir *oscilaciones*: los neutrinos masivos pueden cambiar de familia, por ejemplo ν_e convertirse en ν_μ , exactamente como sucede con los quarks. Veamos un caso simple.

8.1. Oscilaciones

Denotemos a los tres autoestados de interacción de neutrinos como

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

y los de masa como

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

Estarán conectados por una matriz similar a V_{CKM}

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = V_\nu \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

Por los momentos, digamos que V_ν toma la forma (7.43). Supongamos que tenemos una interacción que produce un haz de neutrinos ν_e en $t = 0$, por ejemplo, decaimiento β . El estado $|\nu_e\rangle$ será una combinación lineal de los autoestados de masa

$$|\nu_e(0)\rangle = a|\nu_1\rangle + b|\nu_2\rangle + c|\nu_3\rangle \quad (8.4)$$

Si este neutrino se propaga libremente, en un momento t posterior vendrá dado por

$$|\nu_e(t)\rangle = a e^{-iE_1 t} |\nu_1\rangle + b e^{-iE_2 t} |\nu_2\rangle + c e^{-iE_3 t} |\nu_3\rangle \quad (8.5)$$

donde

$$E_i^2 = p^2 + m_i^2 \quad (8.6)$$

y las masas m_i son en principio distintas. Podemos calcular la probabilidad de detectar un neutrino “de interacción” ν_α en el momento t

$$\mathcal{P}(\nu_\alpha, t) = |\langle \nu_\alpha | \nu_e(t) \rangle|^2 \quad (8.7)$$

lo que nos dará la probabilidad de oscilación del neutrino ν_e al neutrino ν_α . Por ejemplo, la probabilidad de medir ν_e en este haz se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e(t)) &= 1 - A[1 - \cos(E_1 - E_2)t] \\ &+ B[1 - \cos(E_1 - E_3)t] + C[1 - \cos(E_2 - E_3)t] \end{aligned} \quad (8.8)$$

donde los coeficientes A, B, C vienen dados en términos de los elementos de la matriz V_ν . Si tomamos el límite relativista, $p \gg m_i$

$$E_i \simeq p + \frac{m_i^2}{2p} \quad (8.9)$$

tendremos

$$E_i - E_j = \frac{m_i^2 - m_j^2}{2p} \equiv \frac{\Delta m_{ij}^2}{2p} \quad (8.10)$$

Es decir que las probabilidades de oscilación dependen de la diferencia de masa entre las especies de neutrinos.

Si tomamos la velocidad de los neutrinos como c , podemos escribir la probabilidad de oscilación a una distancia x de la fuente. Definiendo la *longitud de oscilación*

$$\ell_{ij} = \frac{2\pi}{E_i - E_j} \simeq \frac{4\pi p}{\Delta m_{ij}^2} \quad (8.11)$$

tenemos

$$\cos(E_i - E_j)t = \cos\left(\frac{2\pi x}{\ell_{ij}}\right) \quad (8.12)$$

En términos de los elementos de matriz de V_ν , obtenemos

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sum_i |V_{\alpha i}|^2 |V_{\beta i}|^2 + \sum_{i \neq j} V_{\alpha i} V_{\beta i}^* V_{\alpha j}^* V_{\beta j} \cos\left(\frac{2\pi x}{\ell_{ij}}\right) \quad (8.13)$$

Las oscilaciones de neutrinos provenientes del sol se han confirmado en los últimos años (problema de los neutrinos solares) así como las de neutrinos producidos en la atmósfera (neutrinos atmosféricos). La determinación precisa de los ángulos de mezcla y diferencias de masa es objeto de intensa investigación en estos momentos. Al momento de escribir estas notas las observaciones son consistentes con un ajuste

$$\Delta m_{12}^2 \sim 10^{-4} eV ; \quad \Delta m_{13}^2 \sim 10^{-3} eV \quad (8.14)$$

para las diferencias de masa, y

$$\tan \theta_{12} \sim 0,4 ; \quad \sin^2 \theta_{13} < 0,067 \quad (8.15)$$

para los ángulos de oscilación.

8.2. Masa para los neutrinos

Hemos visto que, para un fermión neutro, se pueden escribir dos tipos de masa: de Dirac y de Majorana,

$$m_D \bar{\psi} \psi ; \quad m_M \psi^T C \psi \quad (8.16)$$

y el término de Dirac involucra estados derechos e izquierdos, mientras que el de Majorana puede escribirse con un sólo estado de helicidad.

La ausencia de ν_R impide escribir una masa de Dirac para los neutrinos. Ahora bien, el neutrino ν_L es de hecho neutro ante las simetría existente a baja energía, $SU(3) \times U(1)_{em}$, y un término de masa de Majorana sería aceptable. Pero hemos construido el modelo suponiendo la existencia de $SU(2)_L \times U(1)_Y$ roto *espontáneamente*, y éste término de Majorana lo rompería de manera explícita. Si no queremos arruinar esta construcción, la única posibilidad para asignar masa a los neutrinos es introducir la partícula que falta, ν_R .

Éstos nuevos estados ν_R (digamos en principio uno por cada familia, aunque no hay indicaciones a priori de que deba ser así) serían auténticamente neutros bajo $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Podemos escribir un término de masa de Majorana

$$M_R \nu_R^T C \nu_R \quad (8.17)$$

y una interacción de Yukawa con el Higgs, similar a las de las partículas cargadas, que produce un término de masa de Dirac

$$y_{ij}^\nu \bar{\nu}_{Li} \tilde{\Phi} \nu_{Rj} \Rightarrow +h.c. m_D \bar{\nu}_L \nu_R + h.c. \quad (8.18)$$

Esto quiere decir que los estados ν_L , ν_R , no son autoestados de masa, independientemente de que existan otras familias. Consideremos el caso de una sola familia,

$$m_D \bar{\nu}_L \nu_R + M_R \bar{\nu}_R^c \nu_R \quad (8.19)$$

La matriz de masa de los neutrinos luce como

$$\begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & M_R \end{pmatrix} \quad (8.20)$$

y sus autovalores son

$$m_{\pm} = \frac{M_R}{2} \pm \frac{M_R}{2} \sqrt{1 + \frac{m_D^2}{M_R^2}} \quad (8.21)$$

See-saw

Lo interesante es que M_R no está relacionada con la escala del modelo estándar (vev de Φ), y en principio puede tomar cualquier valor. En particular, puede ser

$$M_R \gg m_D \quad (8.22)$$

Esto sería natural si, por ejemplo, M_R proviene del rompimiento espontáneo de la paridad a escalas más altas. En este caso tendremos de (8.21) un estado pesado con masa

$$m_{\nu_+} \sim M_R \quad (8.23)$$

que consistiría esencialmente de ν_R con poca mezcla de ν_L , y un estado liviano con masa

$$m_{\nu_-} \sim \frac{m_D^2}{M_R} \quad (8.24)$$

compuesto casi todo por ν_L . Éste es el famoso mecanismo del *see-saw*: un neutrino R , neutro bajo el grupo del modelo estándar y con una masa de Majorana grande, obliga al neutrino L a ser muy liviano en comparación con los fermiones cargados. Note que ésto solo puede ocurrir con neutrinos. Nos indica que una partícula que tenga tan pocas interacciones, puede fácilmente ser muy liviana. El mecanismo del *see-saw* es particularmente interesante en el contexto de teorías Left-Right, donde todas las partículas derechas del modelos estándar transforman bajo un grupo $SU(2)_R$ imitando a sus contrapartidas izquierdas. Si este grupo $SU(2)_R$ se rompe espontáneamente a una escala muy alta, la condición (8.22) aparece naturalmente.

3 familias

Si consideramos introducir un neutrino ν_R por cada familia tendremos, al igual que sucedía con los quarks, una matriz tipo V_{CKM}

$$V_\nu = U_L^{\nu\dagger} U_L^e \quad (8.25)$$

Toda la discusión desarrollada para los quarks se aplica a este caso: V_ν es una matriz unitaria, que para el caso de N familias tiene N^2 parámetros reales. $N(N-1)/2$ serán ángulos, y $N(N+1)/2$ serán fases. Para eliminar estas fases, hacemos redefiniciones simultáneas de e_{Ri} y e_{Li} , de ν_{Ri} y ν_{Li} . Sin embargo, ahora no disponemos de $2N-1$ fases para rotar, como en el caso de los quarks. En efecto, el término

$$\nu_R^T C \nu_R \quad (8.26)$$

no es invariante ante cambios de fase de ν_R . Recordemos que los cambios de fase debían hacerse simultáneamente en el sector derecho y en el izquierdo.

Esto quiere decir que los neutrinos no pueden absorber fases, únicamente los electrones. Podemos eliminar únicamente N fases y tendremos

$$\frac{N(N-1)}{2} \text{ fases} \quad (8.27)$$

en el sector leptónico. Esto implica violación de CP incluso en el caso de dos familias. En el caso de las tres familias tendremos tres fases

- una fase “ de Dirac”, como en los quarks
- dos fases “ de Majorana”

produciendo contribuciones extra a la violación de CP.

La matriz V_ν suele parametrizarse como

$$V_\nu = V \begin{pmatrix} m_1 e^{i\rho} & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 e^{i\sigma} \end{pmatrix} V^\dagger \quad (8.28)$$

con V escrita como la matriz V_{CKM} , conteniendo tres ángulos de mezcla leptónicos y una fase de Dirac.

Problema 17

Encuentre los coeficientes A, B y C en (8.8)

Problema 18

Suponga que existen los tres ν_{Ri} , y que la estructura $SU(2)_L$ se repite para las partículas derechas, que pasarían a transformarse bajo la representación fundamental de otro grupo, $SU(2)_R$. El grupo de simetría completo será entonces el grupo Left-Right, $SU(3)_c \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_a$. Encuentre la carga de cada campo bajo $U(1)_a$, y exprese la hipercarga como función de ésta y de T_{3R} . Escriba una expresión para la carga electromagnética en términos de las cargas del grupo Left-Right