Estática

Equilibro de cuerpos Rígidos

El término equilibrio implica ya sea que un objeto está en reposo o que su centro de masa se mueve con velocidad constante. En este capítulo se tratará sólo con el primero de estos casos. El equilibrio estático es una situación común en la práctica de la ingeniería y los principios implicados son de especial interés para los ingenieros civiles, arquitectos e ingenieros mecánicos. Los lectores que sean estudiantes de ingeniería en el futuro sin duda tomarán cursos para reforzar sus conocimientos de estática.

Una condición necesaria para el equilibrio es que la fuerza que actúa sobre el centro de masa de un objeto sea cero. En este capitulo, los objetos se tratarán como si fueran partículas concentradas en su centro de masa. Si la fuerza neta sobre la partícula es cero, la partícula permanece en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se mueve con velocidad constante (si originalmente estaba en movimiento).

La situación con objetos reales, los cuales no son puntuales sino extendidos, se complica; más aun cuando éstos no pueden tratarse como partículas. Para que un objeto extendido esté en equilibrio estático la fuerza sobre él debe ser cero y la torca o momento de torsión alrededor de cualquier origen debe ser también cero.
Con el propósito de establecer si un objeto está en equilibrio o no, se debe conocer su tamaño y forma, las fuerzas que actúen sobre sus diferentes partes y los puntos de aplicación de las diversas fuerzas.

Las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido

Considere una fuerza aislada **F** que actúa sobre un objeto rígido, como se muestra en la figura 1.

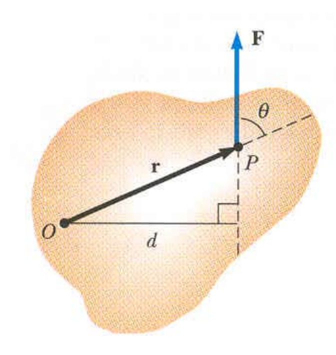

Figura 1.

El efecto de la fuerza depende del punto P donde se aplica. Si **r** es el vector de posición de este punto relativo al origen O, el momento de torsión asociado a la fuerza **F** alrededor de O está dado por la ecuación

$$\overline{\tau} = \overline{r} \times \overline{F} \tag{1.1}$$

Es decir

$$\overline{\tau} = (yF_z - zF_y)\hat{i} + (zF_x - xF_z)\hat{j} + (xF_y - yF_x)\hat{k} \tag{1.2}$$

el vector $\overline{\tau}$ es perpendicular al plano formado por los vectores **r** y **F**. Además, el sentido de $\overline{\tau}$ está determinado por el sentido de la rotación de **F**. Con la regla de la mano derecha se puede determinar la dirección de $\overline{\tau}$: cierre su mano derecha de manera tal que sus dedos den vuelta en la dirección de rotación que **F** tiende a dar al objeto; su pulgar apunta entonces en la dirección de $\overline{\tau}$. Por lo tanto, en la figura 1, $\overline{\tau}$ está dirigida hacia afuera del papel.
Como se puede ver en la figura 1, la tendencia de F a hacer girar el objeto alrededor de un eje que pasa por O. Depende del brazo de palanca d ($d = r\text{sen}\theta$), así como de la magnitud de F. Es decir la magnitud del momento de torsión es

$$\tau = rF\text{sen}\theta \tag{1.3}$$

Supongamos ahora que dos fuerzas, F_1 y F_2, actúan sobre un objeto rígido. Las dos fuerzas tendrán el mismo efecto sobre el objeto sólo si tienen la misma magnitud, la misma dirección y la misma línea de acción. En otras palabras, dos fuerzas F_1 y F_2 son equivalentes si y sólo si $F_1 = F_2$ y si las dos producen el mismo momento de torsión en torno de cualquier punto dado. Dos fuerzas iguales y opuestas que no son equivalentes se ilustran en la figura 2.

.

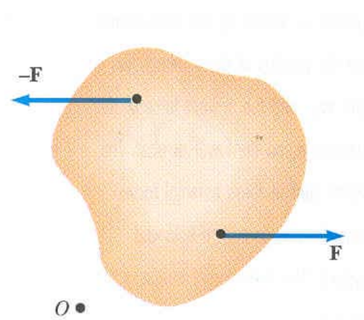

Figura 2.

La fuerza dirigida hacia la derecha tiende a hacer girar al objeto en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de un eje perpendicular al diagrama y que pasa por O, en tanto que la fuerza dirigida hacia la izquierda tiende a hacerlo girar en el sentido contrario en torno de ese mismo eje.

Suponga que un objeto puede girar alrededor de un eje que pasa por su centro de masa, como en la figura 3.

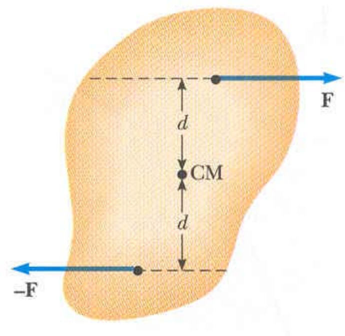

Figura 3.

Dos fuerzas iguales y opuestas actúan en la dirección indicada, de manera tal que sus líneas de acción no pasan por el centro de masa. Un par de fuerzas que actúan de este modo forman lo que se conoce como un par. (Las dos fuerzas mostradas en la figura 2 también forman un par). Puesto que cada fuerza produce el mismo momento de torsión, Fd, el momento de torsión neto tiene una magnitud 2Fd. Es claro que el objeto gira en el sentido de las manecillas del reloj y experimenta una aceleración angular alrededor del eje. Esta es una situación de no equilibrio en relación con el movimiento rotacional. Es decir, el momento de torsión sobre el objeto produce una aceleración angular α de acuerdo con la relación $\tau_{neto} = 2Fd = I\alpha$.

En general, un objeto está en equilibrio rotacional sólo si su aceleración angular es cero; es decir, el momento de torsión neto alrededor de cualquier origen debe ser cero, puesto que $\tau = I\alpha$. Por lo tanto, para el equilibrio de un objeto, se deben cumplir dos condiciones, que pueden establecerse del modo siguiente:

La fuerza externa resultante debe ser igual a cero. $\sum \overline{F} = 0$. Es decir,

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0 \tag{1.4}$$

El momento de torsión externo alrededor de cualquier origen debe ser cero. $\sum \overline{\tau} = 0$. Es decir

$$\sum \tau_x = 0 \qquad \sum \tau_y = 0 \qquad \sum \tau_z = 0 \tag{1.5}$$

La primera condición es un enunciado del equilibrio traslacional y nos dice que la aceleración lineal del centro de masa del objeto debe ser cero cuando se observa desde un sistema de referencia inercial. La segunda condición es un enunciado del equilibrio rotacional que nos indica que la aceleración angular alrededor de cualquier eje debe ser cero. En el caso especial del equilibrio estático, el objeto está en reposo por lo que no tiene velocidad lineal ni angular (esto es, $v_{CM} = 0$ y $w = 0$).

Por consiguiente, en un sistema complejo en el que actúan varias fuerzas en diferentes direcciones, será necesario resolver un conjunto de ecuaciones con hasta seis incógnitas. Limitando el análisis a situaciones en las que todas las fuerzas están en el plano xy, el número de ecuaciones se reduce a tres. Dos de éstas surgen de balancear las fuerzas en las direcciones x y y. La tercera proviene de la ecuación del momento de torsión, es decir, el momento de torsión neto alrededor de cualquier punto en el plano xy debe ser cero. Por tanto, las dos condiciones de equilibrio brindan las ecuaciones

$$\sum F_x = 0 \tag{1.6}$$

$$\sum F_y = 0 \tag{1.7}$$

$$\sum \tau_z = \sum (xF_y - yF_x) = 0 \tag{1.8}$$

donde el eje de la ecuación del momento de torsión es arbitrario, como se mostrará posteriormente. Hay dos casos de equilibrio bastante comunes. El primero se relaciona con un objeto sujeto a sólo dos fuerzas; el segundo se refiere a un objeto sometido a tres fuerzas.

Caso I Un objeto sujeto a dos fuerzas está en equilibrio si y sólo si las dos fuerzas son de igual magnitud, opuestas en dirección y tienen la misma línea de acción. La figura 4a muestra una situación en la que el objeto no está en equilibrio puesto que las dos fuerzas no están sobre la misma línea. Nótese que el momento de torsión alrededor de cualquier eje, como el que pasa por *P*, no es igual a cero, lo cual viola la segunda condición de equilibrio.

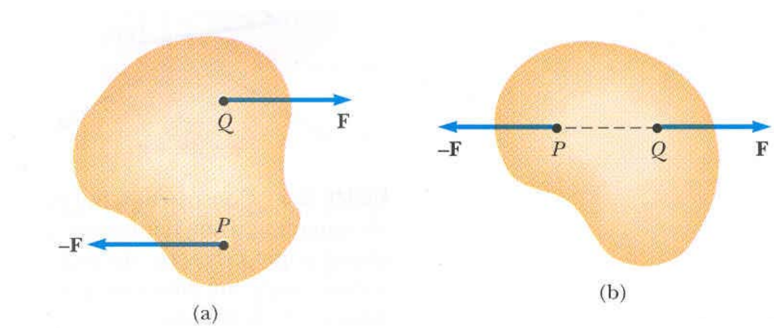

Figura 4.

En la figura 4b, el objeto está en equilibrio debido a que las fuerzas tienen la misma línea de acción. En esta situación es muy fácil ver que el momento de torsión neto alrededor de cualquier eje es cero.

Caso II Un objeto sometido a tres fuerzas está en equilibrio, si las líneas de acción de las tres fuerzas se intersectan en un punto común. Es decir, las fuerzas deben ser concurrentes (Una excepción a esta regla es la situación en la cual ninguna de las líneas de acción se intersectan. En esta situación, todas las fuerzas deben ser paralelas entre sí y estar en el mismo plano.) La figura 5 ilustra la regla general. Las líneas de acción de las tres fuerzas pasan por el punto S.

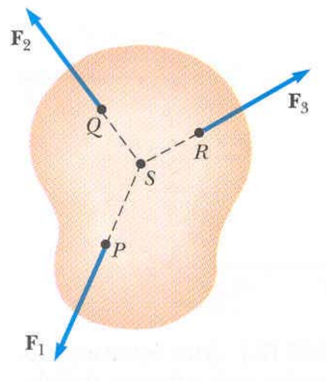

Figura 5.

Las condiciones de equilibrio requieren que $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \cdots = 0$ y que el momento de torsión neto alrededor de cualquier eje sea cero. Observe que siempre que las fuerzas son concurrentes, el momento de torsión en torno de un eje que pasa por *S* debe ser cero.

Es fácil mostrar que, independientemente del número de fuerzas que actúan sobre un objeto que está en equilibrio traslacional, si el momento de torsión neto en relación con algún punto es cero, también debe ser cero respecto de cualquier otro punto. El punto puede estar dentro o fuera de las fronteras del objeto. Considérese un objeto bajo la acción de varias fuerzas de modo que la fuerza resultante $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \cdots = 0$. La figura 6 describe esta situación (por claridad, sólo se muestran cuatro fuerzas).

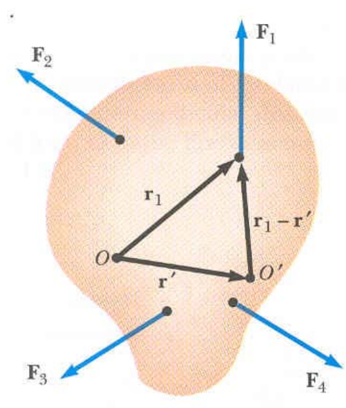

Figura 6.

El punto de aplicación de $\overline{F}_1$ relativo a O se especifica por medio del vector de posición $\boldsymbol{r_1}$. De modo similar, los puntos de aplicación de $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ y $\overline{F}_4$ se especifica mediante $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, y $\mathbf{r}_4$. El momento de torsión alrededor de O es

$$\sum \overline{\tau}_0 = \overline{r}_1 \times \overline{F}_1 + \overline{r}_2 \times \overline{F}_2 + \overline{r}_3 \times \overline{F}_3 + \overline{r}_4 \times \overline{F}_4$$

Considérese ahora otro punto arbitrario, O', que tiene el vector de posición r' relativo al punto O. El punto de aplicación de $\overline{F}_1$ relativo a O' se identifica por medio del vector $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r'}$. De igual modo, el punto de aplicación de $\overline{F}_2$ relativo a O' es $\boldsymbol{r_2 - r'}$, y así sucesivamente. En consecuencia, el momento de torsión alrededor de O' es

$$\sum \overline{\tau}_0{}' = (\overline{r}_1 - \overline{r}') \times \overline{F}_1 + (\overline{r}_2 - \overline{r}') \times \overline{F}_2 + (\overline{r}_3 - \overline{r}') \times \overline{F}_3 + (\overline{r}_4 - \overline{r}') \times \overline{F}_4$$

$$\sum \overline{\tau}_0{}' = \overline{r}_1 \times \overline{F}_1 + \overline{r}_2 \times \overline{F}_2 + \overline{r}_3 \times \overline{F}_3 + \overline{r}_4 \times \overline{F}_4 - \overline{r}' \times (\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{F}_4)$$

Puesto que se supone que la fuerza total es cero, el último término en la última expresión es igual a cero y vemos que el momento de torsión respecto de O' es igual al momento de torsión alrededor de O. Es decir,

$$\sum \overline{\tau}_0 = \sum \overline{\tau}_0{}'$$

Por lo tanto, si un objeto está en equilibrio traslacional y su momento de torsión alrededor de un punto es cero, también es cero respecto de cualquier otro punto.

Centro de gravedad

Siempre que se trabaje con objetos rígidos, una de las fuerzas que se debe de considerar es el peso del objeto, es decir, la fuerza de la gravedad que actúa sobre él. Con el fin de calcular el momento de torsión debido a la fuerza del peso, puede considerarse como si todo el peso estuviera concentrado en un solo punto, denominado centro de gravedad. El centro de gravedad de un objeto coincide con su centro de masa si el objeto está en un campo gravitacional uniforme.

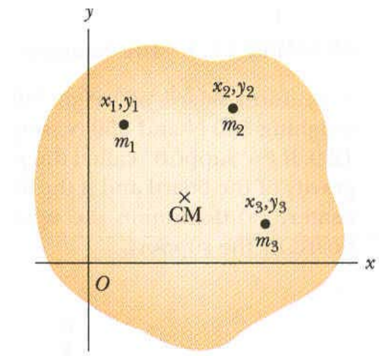

Figura 7.

Para ver esto, considérese un objeto de forma arbitraria ubicado en el plano xy, como el de la figura 7. Supóngase que el objeto se divide en numerosas partículas muy pequeñas de masas m_1, m_2, m_3,… con coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)... La coordenada x del centro de masa se escribe

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots}{x_1 + x_2 + \cdots} = \frac{\sum m_ix_i}{\sum x_i} \qquad (1.9)$$

Las coordenadas y_{CM} y z_{CM} se definen de una manera similar. Es decir

$$y_{CM} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots}{y_1 + y_2 + \cdots} = \frac{\sum m_iy_i}{\sum y_i} \qquad (1.10)$$

$$z_{CM} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \cdots}{z_1 + z_2 + \cdots} = \frac{\sum m_iz_i}{\sum z_i} \qquad (1.11)$$

Considérese ahora el peso de cada parte del objeto, como se muestra en la figura 8.

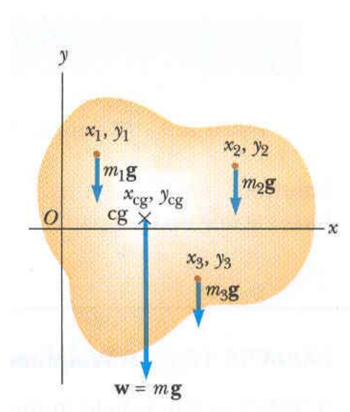

Figura 8.

Cada partícula contribuye con un momento de torsión alrededor del origen igual al peso de la partícula multiplicado por el brazo de palanca correspondiente. Por ejemplo, el momento de torsión debido al peso m_1g_1 es $m_1g_1x_1$, el momento de torsión debido al peso m_2g_2 es $m_2g_2x_2$, y así sucesivamente, donde se está suponiendo que la gravedad tiene un valor diferente en cada partícula. Al igualar el momento de torsión ejercido por el peso total ($m_1g_1 + m_2g_2 + \cdots$) en el centro de gravedad (x_{cg}) con la suma de los momentos de torsión que actúan sobre las partículas individuales, se obtiene

$$(m_1g_1 + m_2g_2 + \cdots)x_{cg} = m_1g_1x_1 + m_2g_2x_2 + \cdots$$

Si se supone que g es uniforme ($g_1 = g_2 = \cdots = g$) a lo largo y ancho del objeto (como suele ser el caso), entonces se obtiene

$$x_{cg} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots}{x_1 + x_2 + \cdots} = \frac{\sum m_ix_i}{\sum x_i}$$

en otras palabras, el centro de gravedad se localiza en el centro de masa siempre y cuando el objeto se encuentre en un campo gravitacional uniforme.

En algunos ejemplos que se presentan en la siguiente sección nos ocuparemos de objetos simétricos y homogéneos para los cuales su centro de gravedad coincide con su centro geométrico. Un objeto rígido en un campo gravitacional uniforme puede equilibrarse por medio de una sola fuerza igual en magnitud al peso del objeto, siempre que la fuerza esté dirigida hacia arriba y pase por el centro de gravedad.

Ejemplos de objetos rígidos en equilibrio estático

Al trabajar con problemas de equilibrio estático es importante reconocer las fuerzas externas que actúan sobre el objeto. Cualquier error al hacer esto producirán un análisis incorrecto. Se recomienda aplicar el siguiente método cuando se analice un objeto en equilibrio bajo la acción de varias fuerzas externas:

Ejemplo 1. El sube y baja. Un tablón uniforme de 40.0 N de peso soporta a dos niños que pesan uno 500 N y el otro 350 N, como se muestra en la figura 9. Si el soporte o punto de apoyo está debajo del centro de gravedad del tablón y si la niña de 500 N se encuentra a 1.50 m del centro, (a) Determine la fuerza hacia arriba ***n*** ejercida sobre el tablón por el soporte.

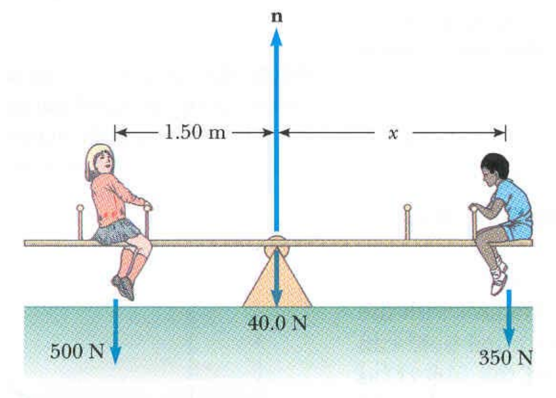

Figura 9.

Solución: Observe primero que, además de **n**, las fuerzas externas que actúan sobre el tablón son los pesos de los niños y el peso del tablón, y que todas apuntan hacia abajo. Es posible suponer que el centro de gravedad del tablón está en el centro geométrico porque hemos señalado que el tablón es uniforme. Puesto que el sistema está en equilibrio, la fuerza *n* hacia arriba debe equilibrar todas las fuerzas hacia abajo. De acuerdo con $\sum F_y = 0$, se tiene

$$\mathbf{n} - 500\ \text{N} - 350\ \text{N} - 40.0\ \text{N} = 0$$

Es decir, la fuerza normal **n** = 890 N.
La ecuación $\sum F_x = 0$ se aplica también en esta situación, pero es innecesario debido a que no hay fuerzas que actúen horizontalmente sobre el tablón.

(b) Determine dónde debe sentarse el niño de 350 N para equilibrar el sistema.

Solución: Para encontrar esta posición, debemos apelar a la segunda condición de equilibrio. Si se toma el centro de gravedad del tablón como el eje para nuestra ecuación de momento de torsión, vemos, de acuerdo con la ecuación (1.8) se tiene que

$$(500\ \text{N})(1.50\ \text{m}) - (350\ \text{N})x = 0$$

Es decir, x = 2.14 m.

Ejercicio. Si el punto de apoyo no se encuentra debajo del centro de gravedad del tablón, ¿qué otra información necesitaría para resolver el problema?

Ejemplo 2. Una mano que soporta un peso. Un peso de 50.0 N es sostenido en la mano con el antebrazo en posición horizontal, como muestra la figura 10a.

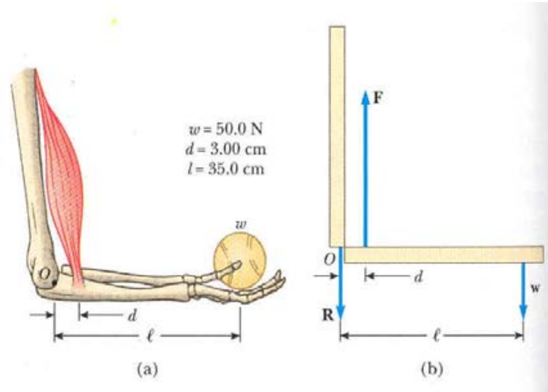

Figura 10.

El músculo del bíceps está unido a 3.00 cm de la articulación, y el peso se encuentra a 35.0 cm de ésta. Encuentre la fuerza hacia arriba que el bíceps ejerce sobre el antebrazo y la fuerza hacia abajo que ejerce la parte superior del brazo sobre el antebrazo y que actúa en la articulación. Ignore el peso del antebrazo.

Solución: La figura 10b muestra que las fuerzas que actúan sobre el antebrazo son equivalentes a aquellas que actúan sobre una barra. Donde F es la fuerza hacia arriba ejercida por el bíceps y R es la fuerza hacia abajo ejercida por la parte superior del brazo en la articulación. De acuerdo con la primera condición de equilibrio, se tiene

$$\sum F_y = F - R - 50.0N = 0 \qquad (1.12)$$

A partir de la segunda condición de equilibrio sabemos que la suma de los momentos de torsión alrededor de cualquier punto debe ser cero. Con la articulación O como el eje, y de acuerdo con (1.8) se tiene

$$Fd - wl = 0$$

$$F(3.00 \text{ cm}) -(50.0 \text{ N})(35.0 \text{ cm}) = 0$$

$$F = 583 \text{ N}.$$

Este valor para F puede sustituirse en la ecuación de equilibrio (1.9) para producir R = 33 N. Este ejemplo muestra que las fuerzas en las articulaciones y en los músculos pueden ser extremadamente grandes.

Ejercicio: En la realidad, el bíceps forma un ángulo de 15.0° con la vertical, por lo que F tiene una componente vertical así como una horizontal. Encuentre el valor de F y las componentes de R e incluya este hecho en su análisis.
Respuesta: F = 604 N, R_x = 156 N, R_y = 533 N.

Ejemplo 3. Persona sobre una viga horizontal. Una viga horizontal uniforme de 8.00 m de largo y 200 N de peso está unida a un muro por medio de una conexión tipo pasador. Su extremo alejado está sostenido por un cable que forma un ángulo de 53.0° con la horizontal (Fig. 11a). Si una persona de 600 N está parada a 2.00 m del muro. Encuentre la tensión en el cable y la fuerza ejercida por el muro sobre la viga.

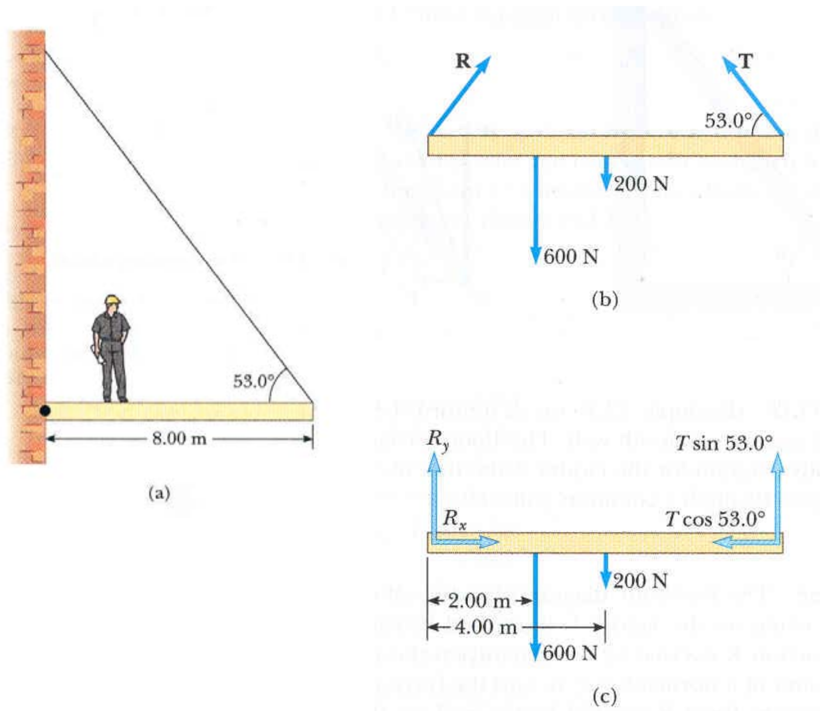

Figura 11.

Solución: Debemos identificar primero todas las fuerzas externas que actúan sobre la viga. Éstas son su peso, la fuerza de tensión T ejercida por el cable, la fuerza R ejercida por el muro en el pivote (la dirección de esta fuerza se desconoce) y el peso de la persona sobre la viga. Todas ellas se indican en el diagrama de cuerpo libre de la viga (Fig. 11b). Si descomponemos T y R en las componentes horizontal y vertical y aplicamos la primera condición de equilibrio, se obtiene

$$\sum F_x = R\cos\theta - T\cos 53^{\circ} = 0$$

$$\sum F_y = R\mathrm{sen}\theta + T\mathrm{sen}53^{\circ} - 600.0\mathrm{N} - 200.0\mathrm{N} = 0$$

Debido a que se tienen tres incógnitas: R, T y θ no se puede obtener una solución a partir de estas dos expresiones. Es necesario recurrir ahora a la condición para el equilibrio rotacional. Un eje conveniente para nuestra ecuación del momento de torsión es el que pasa por el pivote en O. La característica que hace que este punto sea tan conveniente es que la fuerza R y la componente horizontal de T tienen ambas un brazo de palanca igual a cero, por lo que su momento de torsión también es cero. Recordando nuestra convención para el signo del momento de torsión alrededor de un eje y al observar que los brazos de palanca de las fuerzas de 600 N, 200 N y T sen(53°) son 2.00 m, 4.00 m y 8.00 m respectivamente, se obtiene

$$\sum \tau_0 = (T\mathrm{sen}53^{\circ})(8.0\mathrm{m}) - (600.0\mathrm{N})(2.0\mathrm{m}) - (200.0\mathrm{N})(4.0\mathrm{m}) = 0$$

Es decir, T = 313 N. Así, la ecuación del momento de torsión con este eje proporciona directamente una de las incógnitas. Este valor se sustituye en las ecuaciones de equilibrio traslacional para obtener

$$R\cos\theta = 188.0\ \mathrm{N}$$

$$R\mathrm{sen}\theta = 550.0\ \mathrm{N}$$

Dividiendo estas dos ecuaciones se obtiene

$$\tan\theta = \frac{550}{180} = 2.93$$

Es decir $\theta = 71.1^{\circ}$. Con esto se obtiene que R = 581 N.

Si se hubiera escogido algún otro eje para la ecuación del momento de torsión, la solución habría sido la misma. Por ejemplo, si se hubiera elegido el eje que pasa por el centro de gravedad de la viga, la ecuación del momento de torsión incluiría tanto a *T* como a *R*. Sin embargo, esta ecuación, acoplada con las ecuaciones de equilibrio de fuerzas, conduce a la misma solución. ¡Inténtelo!

Ejemplo 4. La escalera inclinada. Una escalera uniforme de longitud l y peso w = 50 N descansa sobre una pared vertical lisa (Fig. 12a). Si el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el suelo es $\mu_s = 0.40$ encuentre el ángulo mínimo para que la escalera no se deslice.

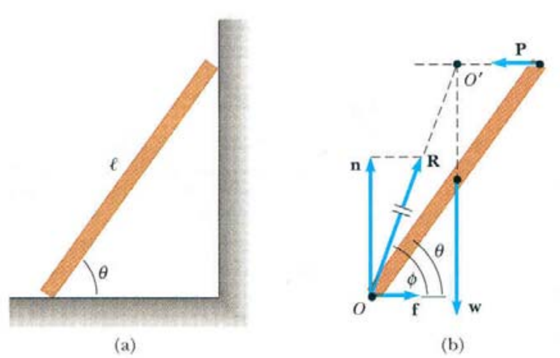

Figura 12.

Solución: El diagrama de cuerpo libre que muestra todas las fuerzas externas que actúan sobre la escalera se ilustra en la figura 12b. La reacción *R* ejercida por el suelo sobre la escalera es la suma vectorial de la fuerza normal, *n*, y la fuerza de fricción, *f*. La fuerza de reacción *P* ejercida por la pared sobre la escalera es horizontal, puesto que la pared no presenta fricción. De acuerdo con la primera condición de equilibrio aplicada a la escalera, tenemos

$$\sum F_x = f - P = 0$$
$$\sum F_y = n - w = 0$$

Puesto que *w* = 50 N, de la segunda ecuación se obtiene *n* = 50 N. Además, cuando la escalera está a punto de deslizarse, la fuerza de fricción debe tener su valor máximo dado por $f_{s\,max} = \mu_s n$ = (0.40)(50 N) = 20 N. De modo que, *P* = 20 N.

Para encontrar θ se debe de utilizar la segunda condición de equilibrio. Cuando los momentos de torsión se toman alrededor del origen *O* en el pie de la escalera, se obtiene

$$\sum \tau = Pl\,\text{sen}\theta - w\frac{1}{2}\cos\theta = 0$$

Pero P = 20 N cuando la escalera casi empieza a deslizarse y *w* = 50 N, de modo que de la expresión anterior se obtiene

$$\tan\theta_{min} = \frac{w}{2P} = \frac{50\text{N}}{40\text{N}} = 1.25$$

Es decir, $\theta_{min} = 51^{o}$. Es interesante observar que el resultado no depende de l o de w. La respuesta depende sólo del coeficiente de fricción, μ_s.

Ejemplo 5. Levantamiento de un cilindro. Un cilindro de peso w y radio R se va a levantar en un escalón de altura h, como se muestra en la figura 13. Se enrolla una cuerda alrededor del cilindro y se jala horizontalmente. Suponiendo que el cilindro no desliza sobre el escalón, encuentre la fuerza F mínima necesaria para la levantar el cilindro y la fuerza de reacción en P ejercida por el escalón sobre el cilindro.

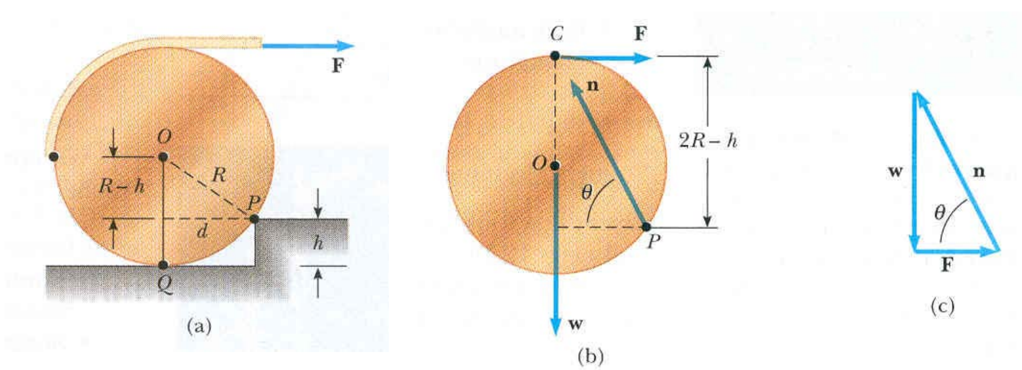

Figura 13.

Solución: Cuando el cilindro está a punto de levantarse, la fuerza de reacción en Q se hace cero. En consecuencia, en este momento hay sólo tres fuerzas sobre el cilindro, como se ilustra en la figura13b. De acuerdo con el triángulo de línea punteada en la figura 13a, vemos que el brazo de palanca d del peso relativo al punto P es

$$d = \sqrt{R^2 - (R - h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}$$

El brazo de palanca de F relativo a P es 2R - h. Por lo tanto, el momento de torsión neto que actúa sobre el cilindro alrededor de P es

$$wd - F(2R - h) = 0$$

Es decir $w\sqrt{2Rh - h^2} - F(2R - h) = 0$. De aquí se obtiene que la fuerza F es

$$F = \frac{w\sqrt{2Rh - h^2}}{2R - h}$$

Se puede determinar las componentes de **n** con la condición de equilibrio de fuerzas:

$$\sum F_x = F - n\cos\theta = 0$$
$$\sum F_y = n\text{sen}\theta - w = 0$$

De la división de estas ecuaciones se obtiene

$$\tan\theta = \frac{w}{F}$$

y al despejar n se obtiene

$$n = \sqrt{w^2 + F^2}$$

Ejercicio: Resuelva este problema pero tome en cuenta que las tres fuerzas que actúan sobre el cilindro son concurrentes y que en consecuencia todas pasan por el punto *C*. Las tres fuerzas forman los lados del triángulo mostrado en la figura 13c.

Formulario

El momento de torsión asociado a la fuerza **F** aplicada en un punto r, medido desde O está dado por la ecuación

$$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F}$$

Es decir

$$\bar{\tau} = (yF_z - zF_y)\hat{i} + (zF_x - xF_z)\hat{j} + (xF_y - yF_x)\hat{k}$$

La magnitud del momento de torsión

$$\tau = rF\mathrm{sen}\theta$$

Condiciones de equilibrio

1. La fuerza externa resultante debe ser igual a cero. $\sum \bar{F} = 0$. Es decir,

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0$$

2. El momento de torsión externo alrededor de cualquier origen debe ser cero. $\sum \bar{\tau} = 0$. Es decir

$$\sum \tau_x = 0 \qquad \sum \tau_y = 0 \qquad \sum \tau_z = 0$$

Cuando todas las fuerzas están en el plano xy, la condición de equilibrio es

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum \tau_z = \sum (xF_y - yF_x) = 0$$

El centro de masa de un sistema de masas

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots}{x_1 + x_2 + \cdots} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum x_i}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots}{y_1 + y_2 + \cdots} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum y_i}$$

$$z_{CM} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots}{z_1 + z_2 + \cdots} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum z_i}$$