

13.4. FUNCIÓN DE ONDA E INTERPRETACIÓN PROBABILÍSTICA

Como operador de momento angular sus autoestados son comunes a S^2 y S_z y los denotaremos como $|s, m_s\rangle$ y verifican (véase la sección 11.6),

$$S^2|s, m_s\rangle = s(s+1)\hbar^2|s, m_s\rangle \quad [13.4.1]$$

$$S_z|s, m_s\rangle = m_s\hbar|s, m_s\rangle \quad [13.4.2]$$

Las relaciones de conmutación de las componentes son $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$ y cíclicas. En el caso del electrón $s = 1/2$ y $m_s = +1/2, -1/2$ para poder así explicar la existencia de dos haces en el experimento de Stern-Gerlach. El momento dipolar magnético intrínseco del electrón μ_s guarda con S una relación de la forma,

$$\mu_s = -\frac{g_s\mu_B}{\hbar} S \quad [13.4.3]$$

La constante g_s se llama factor giromagnético de espín. Para el electrón vale $g_s = 2.00232$. Para otras partículas como el protón y el neutrón, que tienen así mismo espín semientero, el factor giromagnético, toma un valor distinto del anterior, como veremos en el capítulo 36.

La función de onda que describe una partícula de espín $1/2$ es, en general, un objeto de dos componentes al que se denomina *espinor*, es decir

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \Psi_+(\mathbf{r}, t) \\ \Psi_-(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}$$

Suponiendo que el espinor está normalizado se tiene

$$1 = \int d^3r \Psi^\dagger \Psi = \int d^3r [|\Psi_+(\mathbf{r}, t)|^2 + |\Psi_-(\mathbf{r}, t)|^2]$$

de donde se sigue que $|\Psi_+(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r$ ($|\Psi_-(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r$) pueda interpretarse como la probabilidad de que, en el instante t , la partícula esté en el elemento de volumen d^3r en torno a \mathbf{r} con tercera componente de espín igual a $+1/2$ ($-1/2$).

El operador S^2 es constante y para una partícula de espín $1/2$ vale

$$S^2 = 3/4\hbar^2 \mathbf{1}$$

donde $\mathbf{1}$ es la identidad

Una representación adecuada de los operadores de espín se consigue con las matrices de Pauli $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ definidas por

$$S = \frac{\hbar}{2} \sigma$$

Es fácil demostrar a partir de las reglas de conmutación de las componentes de S las siguientes propiedades de tales matrices

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z \quad [\sigma_y, \sigma_x] = 2i\sigma_z \quad [\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$$

$$\{\sigma_x, \sigma_y\} = 0 \quad \{\sigma_x, \sigma_z\} = 0 \quad \{\sigma_y, \sigma_z\} = 0$$

Donde $\{a, b\} = a \cdot b + b \cdot a$ se denomina anticonmutador de a y b .

Suele ser habitual elegir la representación como matrices 2×2 complejas en la que σ_z es diagonal y σ_x es real.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad [13.4.4]$$

Las autofunciones de S_z , y, por tanto, de σ_z son en esta notación espinores de dos componentes (parejas de números complejos), que elegimos con módulo unidad. Así la autofunción de σ_z con autovalor $+1(-1)$, que denotamos $\kappa_+(\kappa_-)$, satisface

$$\sigma_z \kappa_+ = \kappa_+ (\sigma_z \kappa_- = -\kappa_-)$$

y se representa por el vector

$$\kappa_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \kappa_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un estado de espín será en general una combinación lineal de las autofunciones anteriores $c_+ \kappa_+ + c_- \kappa_-$ donde $|c_+|^2$ ($|c_-|^2$) es la probabilidad de que al medir S_z en ese estado se encuentre el valor $+\hbar/2$ ($-\hbar/2$), a condición de que ese estado esté normalizado $|c_+|^2 + |c_-|^2 = 1$.

Veamos un ejemplo: supongamos que un haz de átomos de espín $1/2$ se hace pasar a través de un dispositivo Stern-Gerlach orientado según una dirección que llamamos eje Z . Como hemos descrito, este haz se desdobra en dos haces correspondientes a las dos posibles proyecciones del espín según el eje Z . Si seleccionamos el haz con proyección $+1/2$, por ejemplo, y lo hacemos pasar a través de un segundo Stern-Gerlach que supondremos orientado según el eje X , la pregunta que surge de

manera natural es, ¿cuántos haces se observarán y con qué intensidades relativas?
El haz seleccionado en el primer Stern-Gerlach tiene como autofunción de espín

$$\kappa_+^x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pues es autoestado de σ_z con autovalor $+1$. De acuerdo con [13.4.4] el estado anterior no es autoestado de σ_x como es inmediato comprobar. Un sencillo cálculo muestra que los autoestados de σ_x son

$$\kappa_+^x = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \kappa_-^x = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

de donde se tiene que el estado seleccionado en el primer Stern-Gerlach es una combinación lineal de los autoestados correspondientes al operador de espín según la dirección del segundo Stern-Gerlach, es decir se tiene

$$\kappa_+^z = \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_+^x + \kappa_-^x)$$

Por lo tanto aparecen dos nuevos haces con intensidades iguales, pues los coeficientes de la combinación lineal anterior al cuadrado, son las probabilidades respectivas de que al atravesar el segundo Stern-Gerlach el haz se desdoble hacia un lado o hacia el otro.

La introducción del espín del electrón, o de cualquier otra partícula, añade un nuevo número cuántico a la función de onda de cualquier sistema.

Supongamos que estamos estudiando una partícula de espín $1/2$ en un potencial central $V(r)$. Los números cuánticos que caracterizan el estado de la partícula son: n (energía), l (momento angular), m (proyección del momento angular) y m_s (proyección del momento angular de espín). Es decir, las autofunciones $\Phi_{nlmm_s}(r, \theta, \varphi)$, comunes a H , L^2 , L_z , S^2 y S_z satisfacen

$$H\Phi_{nlmm_s}(r, \theta, \varphi) = E_n\Phi_{nlmm_s}(r, \theta, \varphi)$$

$$L^2\Phi_{nlmm_s}(r, \theta, \varphi) = l(l+1)\hbar^2\Phi_{nlmm_s}(r, \theta, \varphi)$$

$$L_z\Phi_{nlmm_s}(r, \theta, \varphi) = m\hbar\Phi_{nlmm_s}(r, \theta, \varphi)$$

$$S^2\Phi_{nlmm_s}(r, \theta, \varphi) = \frac{3}{4}\hbar^2\Phi_{nlmm_s}(r, \theta, \varphi)$$

$$S_z\Phi_{nlmm_s}(r, \theta, \varphi) = m_s\hbar\Phi_{nlmm_s}(r, \theta, \varphi)$$

siendo n y l enteros, $-l \leq m \leq l$ y $m_s = \pm \frac{1}{2}$. En la notación de espinores el estado $\Phi_{nlm_l + 1/2}$ se escribe

$$\Phi_{nlm_l(+1/2)} = \Phi_{nlm_l} \cdot \kappa_+ = \begin{pmatrix} \Phi_{nlm_l} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una expresión análoga puede escribirse para la autofunción de la partícula con proyección de espín $-1/2$.

$$\Phi_{nlm_l(-1/2)} = \Phi_{nlm_l} \cdot \kappa_- = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_{nlm_l} \end{pmatrix}$$

13.5. COMPOSICIÓN DE ESPINES

En un sistema formado por dos partículas con espines $1/2$ como el sistema electrón-protón, por ejemplo, los estados de espín posibles son

$$\kappa_+^1 \kappa_+^2 \quad \kappa_+^1 \kappa_-^2 \quad \kappa_-^1 \kappa_+^2 \quad \kappa_-^1 \kappa_-^2 \quad [13.5.1]$$

donde se han representado de manera ordenada los productos de las funciones de onda de espín de las dos partículas. Los estados representados en [13.5.1] son autofunciones comunes de $S_1^2, S_2^2, S_{1,z}, S_{2,z}$, así, por ejemplo,

$$S_1^2 \kappa_+^1 \kappa_+^2 = S_2^2 \kappa_+^1 \kappa_+^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \hbar^2 \kappa_+^1 \kappa_+^2$$

$$S_{1,z} \kappa_+^1 \kappa_+^2 = S_{2,z} \kappa_+^1 \kappa_+^2 = + \frac{1}{2} \hbar \kappa_+^1 \kappa_+^2$$

y expresiones análogas para los demás estados y operadores.

Veamos que algunas combinaciones lineales de [13.5.1] son también autoestados de los operadores de espín total

$$S^2 = (S_1 + S_2)^2 \quad \text{y} \quad S_z = S_{1,z} + S_{2,z}$$

Probaremos, por ejemplo, que $\kappa_+^1 \kappa_+^2$ es autoestado de S^2 con autovalores $2\hbar^2$.

Para ello necesitamos calcular primero $S_1 \cdot S_2 \kappa_+^1 \kappa_+^2$. Teniendo en cuenta que

$$S_x \kappa_+ = \frac{1}{2} \hbar \kappa_- \quad \text{y} \quad S_y \kappa_+ = \frac{i}{2} \hbar \kappa_-$$

es fácil verificar que

$$S_1 \cdot S_2 \kappa_+^1 \kappa_+^2 = S_{1,z} S_{2,z} \kappa_+^1 \kappa_+^2 = \frac{\hbar^2}{4} \kappa_+^1 \kappa_+^2$$

y, por tanto, se tiene

$$S^2 \kappa_+^1 \kappa_+^2 = 2\hbar^2 \kappa_+^1 \kappa_+^2$$

Se tiene entonces que $\kappa_+^1 \kappa_+^2$ es un autoestado de S^2 con momento angular (de espín total) $S = 1$. Actuando ahora con el operador S_z sobre $\kappa_+^1 \kappa_+^2$ tenemos

$$S_z \kappa_+^1 \kappa_+^2 = \hbar \kappa_+^1 \kappa_+^2$$

de donde se sigue que $\kappa_+^1 \kappa_+^2$ es un autoestado de espín total con proyección $+ \hbar$ sobre la tercera componente. En la notación $|s, m_s\rangle$, empleada en [13.4.1], podemos escribir

$$\kappa_+^1 \kappa_+^2 = |1, 1\rangle$$

De manera análoga para el estado $\kappa_-^1 \kappa_-^2 = |1, -1\rangle$

Los estados $\kappa_+^1 \kappa_-^2$ y $\kappa_-^1 \kappa_+^2$ no son autoestados de los operadores S^2 y S_z , pero sí lo son sus combinaciones lineales, convenientemente normalizadas

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\kappa_+^1 \kappa_-^2 + \kappa_-^1 \kappa_+^2] \quad [13.5.2]$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\kappa_+^1 \kappa_-^2 - \kappa_-^1 \kappa_+^2]$$

con autovalores que se pueden calcular sin ninguna dificultad, obteniéndose

$$S^2 \frac{1}{\sqrt{2}} [\kappa_+^1 \kappa_-^2 + \kappa_-^1 \kappa_+^2] = 2\hbar^2 \frac{1}{\sqrt{2}} [\kappa_+^1 \kappa_-^2 + \kappa_-^1 \kappa_+^2]$$

$$S^2 \frac{1}{\sqrt{2}} [\kappa_+^1 \kappa_-^2 - \kappa_-^1 \kappa_+^2] = 0$$

$$S_z \frac{1}{\sqrt{2}} [\kappa_+^1 \kappa_-^2 + \kappa_-^1 \kappa_+^2] = 0$$

$$S_z \frac{1}{\sqrt{2}} [\kappa_+^1 \kappa_-^2 - \kappa_-^1 \kappa_+^2] = 0$$

Podemos, por tanto, identificar las combinaciones lineales [13.5.2] con los autoestados de momento angular total

$$|1\ 0\rangle \text{ y } |0\ 0\rangle$$

respectivamente. Los tres estados con espín total 1, es decir,

$$|1\ 1\rangle \quad |1\ 0\rangle \quad |1\ -1\rangle$$

se conocen con el nombre de *estado triplete*, mientras que el estado con espín total 0

$$|0\ 0\rangle$$

se llama *estado singlete*. Nótese que bajo el cambio de las marcas de las partículas $1 \leftrightarrow 2$, las funciones de onda del estado triplete no cambian, por lo que se denominan simétricas, mientras que la función de ondas del estado singlete cambia de signo bajo dicha transformación y se dice antisimétrica. Estas propiedades de simetría tienen grandes repercusiones dentro de la física cuántica por lo que aparecerán en próximos capítulos donde se analizarán en detalle.

El singlete es el ejemplo más simple e importante de estado *enredado* (*entangled* en inglés). Este tipo de estados presentan características sorprendentes que desafían nuestra intuición y, lo que es mucho más importante, constituyen la base de prometedoras aplicaciones de la Mecánica Cuántica, entre las que podemos citar por su interés: la computación cuántica, la criptografía cuántica y la teleportación.

Un estado enredado se caracteriza por no ser factorizable en estados de cada subsistema, cada partícula en el caso del singlete, y por mantener correlaciones que no existen en la Física Cuántica. Así, en el caso del singlete, los spines de las dos partículas están correlacionados: las medidas de sus componentes de espín, según una dirección arbitraria, proporcionarán siempre valores opuestos $\pm\hbar/2$, y esto sucederá aunque las partículas se encuentren separadas. En la práctica estas correlaciones se han verificado experimentalmente en distancias de hasta 10 km.

En apariencia se produce una violación de la causalidad. Al separar las dos partículas que forman el singlete y enviarlas a dos laboratorios A y B distantes, el resulta-

do de la medida en A de la componente de espín de la partícula correspondiente "obligada" al espín de la otra en B a tomar el valor opuesto. Obviamente hasta que los dos laboratorios no confrontan sus resultados por algún procedimiento, que no supere la velocidad de la luz, no es posible establecer esta correlación.

En general, dados dos sistemas con espines s_1 y s_2 los autoestados del sistema, comunes a $\{S_1^2, S_2^2, S_{1,z}, S_{2,z}\}$ serán de la forma

$$|s_1 s_2 m_1 m_2\rangle$$

y ellos mismos o algunas combinaciones lineales apropiadas de ellos serán autoestados del sistema comunes a $\{S^2, S_z, S_1^2, S_2^2\}$ que se pueden escribir como

$$|s m_s s_1 s_2\rangle$$

siendo $S = S_1 + S_2$. Los coeficientes de las combinaciones lineales antes mencionadas se llaman coeficientes de Glebsh-Gordan $C_{m_1, m_2}^{s_1, s_2}$ y se definen como

$$|s m_s s_1 s_2\rangle = \sum_{m_1, m_2} C_{m_1, m_2}^{s_1, s_2} |s_1 s_2 m_1 m_2\rangle$$

o lo que es lo mismo

$$C_{m_1, m_2}^{s_1, s_2} = \langle s_1 s_2 m_1 m_2 | s m_s s_1 s_2 \rangle$$

El valor máximo para el momento angular total es $s_1 + s_2$ y el valor mínimo es, como comprobaremos, $|s_1 - s_2|$, tomando todos los valores enteros o semiimpares comprendidos. Así, por ejemplo, la composición de los espines $1/2, 1/2$ nos ha producido estados con momento angular 1 y 0 . Un sistema con espines $1, 1/2$ proporcionaría estados con momento angular $3/2, 1/2$.

Veamos que el valor mínimo del espín total es $|s_1 - s_2|$, para ello podemos comprobar que el número de estados es el mismo en las dos bases, en la de espines individuales está claro que el número total va a ser $(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)$. Para calcular el número de estados en la base de espín total, supongamos que $s_1 > s_2$. Resulta claro que el espín máximo será $s_1 + s_2$. Si llamamos s_m al menor valor del espín total, tendremos que

$$\begin{aligned} (2s_1 + 1)(2s_2 + 1) &= \sum_{s=s_m}^{s=s_1+s_2} (2s + 1) \\ &= (s_m + s_1 + s_2)(s_1 + s_2 - s_m - 1) + s_1 + s_2 - s_m + 1 \quad [13.5.3] \\ &= (s_m + s_1 + s_2 + 1)(s_1 + s_2 - s_m + 1) \end{aligned}$$

de donde resulta que, como queríamos probar,

$$s_m = s_1 - s_2$$

Si hubiéramos supuesto que $s_2 > s_1$, habríamos obtenido que $s_m = s_2 - s_1$.
Por tanto el valor mínimo es $s_m = |s_1 - s_2|$.

EJERCICIOS

- 13.1. Sean los operadores $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$, para partículas de espín $1/2$. Demuéstranse las siguientes propiedades:

$$S_{\pm}^{\dagger} = S_{\mp} \quad , \quad [S_+, S_-] = 2\hbar S_z \quad , \quad [S_{\pm}, S_z] = \mp \hbar S_{\pm}$$

- 13.2. Utilizando los conmutadores del ejercicio anterior probar que

$$S_{\pm} \kappa_{\mp}$$

son autoestados de S_z , ¿con qué autovalores?

- 13.3. Demostrar a partir de los dos ejercicios anteriores que es posible elegir una fase de forma que se tenga

$$S_{\pm} \kappa_{\mp} = \hbar \kappa_{\pm}$$

- 13.4. Calcular un estado con proyección de espín $+\hbar/2$ según la dirección del vector $(1, 1, 0)$.

- 13.5. Se prepara un estado con proyección de espín $+\hbar/2$ según la dirección $(0, 0, 1)$. Calcular la probabilidad de obtener $+\hbar/2$ al medir según la dirección $(1, 1, 1)$.

- 13.6. Probar que la función de onda de espín cambia de signo bajo un giro de 2π radianes.

- 13.7. El hamiltoniano de interacción entre el espín y el campo magnético \mathbf{B} es $H = g_s \mu_B \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$. Probar que es posible fijar la magnitud del campo magnético de forma que, al cabo de un tiempo t , el resultado de la interacción sea análogo al de un giro de 2π radianes de todo el dispositivo experimental.

- 13.8. Encontrar las matrices de espín análogas a las matrices de Pauli para una partícula de espín 1.

- 13.1. Usando que S_x y S_y son autoadjuntos, se tiene

$$S_+^\dagger = (S_x + iS_y)^\dagger = S_x - iS_y = S_-$$

Análogamente se prueba para S_- .

A partir del conmutador $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$ y teniendo en cuenta que el conmutador es lineal en sus dos argumentos se prueba que

$$[S_+, S_-] = -2i[S_x, S_y] = 2\hbar S_z$$

Para el último apartado basta utilizar los conmutadores

$$[S_x, S_z] = -i\hbar S_y \quad \text{y} \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x$$

- 13.2. Teniendo en cuenta el conmutador calculado previamente

$$S_z S_+ \kappa_- = \{[S_z, S_+] + S_+ S_z\} \kappa_- = \frac{1}{2} \hbar S_+ \kappa_-$$

Por tanto $S_+ \kappa_-$ es proporcional al estado κ_+ . Análogamente se prueba que $S_- \kappa_+$ es proporcional a κ_- .

- 13.3. Para calcular la constante de proporcionalidad entre $S_+ \kappa_-$ y κ_+ , evaluemos el módulo de $S_+ \kappa_-$. El resultado es

$$\|S_+ \kappa_-\|^2 = \langle 1/2 - 1/2 | S_+^\dagger S_+ | 1/2 - 1/2 \rangle$$

Como hemos visto antes $S_+^\dagger = S_-$ y por otra parte se verifica que

$$S_- S_+ = S^2 - S_z^2 - \hbar S_x$$

Nótese que para obtener la última expresión es preciso usar el conmutador de S_x con S_y . Reuniendo los resultados obtenidos llegamos a

$$\|S_+ \kappa_-\|^2 = \hbar^2$$

Por tanto la constante de proporcionalidad buscada es, salvo una fase, \hbar .

- 13.4. El operador de espín en la dirección dada $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ es

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

El estado pedido es el vector propio de esta matriz con autovalor $+1$. Un cálculo sencillo proporciona

$$S_u = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1+i}{4} \end{pmatrix}$$

135. El operador de espín en la nueva dirección es

$$\sigma \cdot u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

La probabilidad pedida es la componente del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ según el autovector de la matriz anterior asociado al autovalor $+1$. El resultado es

$$P = \frac{1}{3 - \sqrt{3}}$$

136. Considerando la matriz de Pauli en la dirección $u = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$, que resulta de girar la matriz de Pauli según la dirección $(0, 0, 1)$ (eje Z) un ángulo θ alrededor del eje Y y calculando su autovector con autovalor $+1$ obtenemos,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el autoestado correspondiente a un giro de 2π radianes sería $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es preciso girar el espínor 4π radianes para obtener el autoestado original.

137. La ecuación de Schrödinger para el hamiltoniano dado es

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = g\mu_B \frac{\sigma \cdot B}{2} \Psi(t)$$

Considerando el campo magnético orientado según el eje Z, se llega a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden,

$$\frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} + \frac{ig\mu_B B}{2\hbar} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Psi(t) = 0$$

cuya solución es

$$\Psi(t) = \exp \left\{ \frac{-ig\mu_B B}{2\hbar} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} t \right\} \Psi(0)$$

Como puede verse en la solución encontrada para instantes de tiempo t tales que

$$\frac{g\mu_B B t}{2\hbar} = \pi$$

se tiene

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\pi} & 0 \\ 0 & e^{+i\pi} \end{pmatrix} \Psi(0) = -\Psi(0)$$

- 13.8. Definiendo las matrices σ como $S = \hbar\sigma$ y denotando la base de autoestados comunes a S^2 y S_z como $|1, +1\rangle$, $|1, 0\rangle$, $|1, -1\rangle$, respectivamente, la matriz σ_x en esa base es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Usando los operadores σ_+ y σ_- definidos en el ejercicio 13.1 y sus actuaciones sobre los estados de la base anterior se tiene

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i/\sqrt{2} & 0 \\ i/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Puede verificarse además que satisfacen las reglas de conmutación

$$[\sigma_x, \sigma_y] = i\sigma_z$$

- 14.1. Introduciendo una constante de acoplo adimensional se tiene $H_1 = \sqrt{\alpha}W$, donde $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ es la constante de estructura fina y $W = \sqrt{\hbar c}Ex$. El desarrollo de los nuevos niveles de energía será hasta segundo orden

$$E_n = E_{n,0} + \sqrt{\alpha}E_{n,1} + \alpha E_{n,2}$$

El cálculo de $E_{n,1}$ es inmediato pues

$$E_{n,1} = \langle n|W|n\rangle = 0$$

ya que a y a^\dagger tiene valores esperados nulos. Para el cálculo de $E_{n,2}$, sólo es preciso tener en cuenta los estados $|n+1\rangle$ y $|n-1\rangle$, obteniéndose

$$E_{n,2} = -\frac{\hbar c E^2}{2k}$$

Para los datos numéricos del ejercicio $E_{n,0} = 6.230$ MeV y $E_{n,2} = -0.7$ MeV con lo que tenemos

$$E_n = 6.225 \text{ MeV}$$

Por otra parte el hamiltoniano $H = H_0 + H_1$ puede resolverse de manera exacta, sin más que escribir el potencial suma del armónico y la perturbación como un cuadrado perfecto,

$$kx^2/2 - eEx = k(x - eE/k)^2/2 - e^2E^2/(2k)$$

- 14.2. El primer estado excitado del rotor rígido es triplemente degenerado, siendo su energía $E(1) = \hbar^2/I$. Los estados son $|11\rangle$, $|10\rangle$, $|1-1\rangle$. Las correcciones en primer orden a la energía vienen dadas por las raíces del polinomio característico, que en este caso es

$$E_1^3(1) - E(1)\gamma^2\hbar^2 = 0$$

Obteniéndose tres niveles distintos con energías

$$\frac{\hbar^2}{I} + \gamma\hbar, \frac{\hbar^2}{I}, \frac{\hbar^2}{I} - \gamma\hbar$$

Nótese que habríamos llegado al mismo resultado de ser γL_x la perturbación pues el sistema es invariante bajo rotaciones y todas ellas son equivalentes.

- 14.3. El segundo estado excitado del oscilador armónico isótropo bidimensional es triplemente degenerado, con energía $E_0(2) = 3\hbar\omega$, y estados $|11\rangle$, $|20\rangle$, $|02\rangle$ en la notación $|n_1 n_2\rangle$. El polinomio característico es

$$E_2^3(2) - E_1(2) \frac{\lambda^2}{\alpha^2} = 0$$

que tiene tres raíces distintas con lo que la perturbación introducida rompe la degeneración del oscilador bidimensional. Las nuevas energías son

$$3\hbar\omega + \frac{\lambda}{\alpha}, 3\hbar\omega, 3\hbar\omega - \frac{\lambda}{\alpha}$$

- 14.4. Supongamos el pozo centrado entre $-L$ y $+L$. Los niveles de energía son no-degenerados, por lo que la corrección en primer orden vendrá dada por el valor esperado de la perturbación entre los estados no-perturbados para (n impar)

$$E_1(n) = \langle n | \lambda \delta(x) | n \rangle = \frac{\lambda}{L} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

La corrección en segundo orden viene dada por

$$E_2(n) = \sum_{\substack{m \neq n \\ m \text{ impar}}} \frac{|\langle m | \lambda \delta(x) | n \rangle|^2}{E_n - E_m}$$

Realizando unas sencillas integrales se llega a

$$E_2(n) = \sum_{\substack{m \neq n \\ m \text{ impar}}} \frac{8m\lambda^2}{\hbar^2 \pi^2 (n^2 - m^2)}$$

La serie que aparece en el miembro de la derecha es, en realidad, una suma finita que da como resultado

$$E_2(n) = -\frac{2m\lambda^2}{\hbar^2 \pi^2 n^2}$$

La serie convergente anterior puede descomponerse como

$$E_2(n) = \frac{4m\lambda^2}{n\hbar^2 \pi^2} \left(\sum_{\substack{m \neq n \\ m \text{ impar}}} \frac{1}{n+m} + \sum_{\substack{m \neq n \\ m \text{ impar}}} \frac{1}{n-m} \right)$$

