## 3.6. Notación de Dirac y algunas relaciones útiles

En distintos puntos, a lo largo de este texto, utilizaremos por su brevedad y sencillez la notación de bra-kets. La notación de Dirac es flexible pero consistente. Mostraremos algunos ejemplos. Del lado derecho escribiremos, en notación de bra-kets, algunas expresiones que aparecen del lado izquierdo en notación estándar. En algunos casos indicaremos en un segundo renglón la misma expresión, en una forma alternativa de la notación de bra-kets. Los bras $\langle f|$ y los kets $|g\rangle$ tienen propiedades vectoriales y frecuentemente nos referiremos a ellos como vectores de onda.

*Para funciones de variable continua* tenemos:

| Forma estándar | | Notación bra-ket | Notación bra-ket simplificada |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\Longleftrightarrow$ | $\langle x\|f\rangle$ | $\|f\rangle$ |
| $\varphi(\mathbf{r})$ | $\Longleftrightarrow$ | $\langle \mathbf{r}\|\varphi\rangle$ | $\|\varphi\rangle$ |
| $\varphi(\mathbf{p})$ | $\Longleftrightarrow$ | $\langle \mathbf{p}\|\varphi\rangle$ | $\|\varphi\rangle$ |

En el último renglón la función está en la representación de momentos. Generalmente se trabaja en la representación de coordenadas y se usa la notación simplificada sin posibilidad de confusión; sin embargo, si existe posibilidad de confusión, se debe usar la notación más específica. Para la función de onda de partícula libre $\varphi_p(x)$ y para las eigenfunciones $\varphi_n(x)$ utilizaremos indistintamente las siguientes notaciones:

| Forma estándar | | Notación bra-ket | Notación bra-ket simplificada |
|---|---|---|---|
| $\varphi_p(x)$ | $\Longleftrightarrow$ | $\langle x\|\varphi_p\rangle$ | $\|\varphi_p\rangle$ |
| | | $\langle x\|p\rangle$ | |
| $\varphi_p^*(x)$ | $\Longleftrightarrow$ | $\langle \varphi_p\|x\rangle$ | $\langle\varphi_p\|$ |
| | | $\langle p\|x\rangle$ | |
| $\varphi_n(x)$ | $\Longleftrightarrow$ | $\langle x\|\varphi_n\rangle$ | $\|\varphi_n\rangle$ |
| | | $\langle x\|n\rangle$ | $\|n\rangle$ |

$$\widehat{H}\varphi_n(x) = E_n\varphi_n(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \widehat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$$

### 3.6.1. Algunas propiedades generales de los bras y kets*

1. Los bras y kets no siempre representan vectores. Cuando representan funciones escalares y se evalúa el producto interno, el primer factor (el bra) es el complejo conjugado del ket. Cuando representan vectores, el bra es el transpuesto conjugado del ket. La operación que traspone y conjuga se denota generalmente con el símbolo (†). Esto significa que

$$\begin{aligned} |\psi\rangle^* &= \langle\psi| \qquad & \langle\varphi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\varphi\rangle \\ |\psi\rangle^\dagger &= \langle\psi| \qquad & \langle\varphi|\psi\rangle^\dagger = \langle\psi|\varphi\rangle. \end{aligned} \tag{3.73}$$

2. La acción de un operador $\widehat{Q}$ sobre un ket $|\psi\rangle$ es otro ket, es decir:

$$\widehat{Q}|\psi\rangle = |\phi\rangle. \tag{3.74}$$

3. El producto $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ es un operador, el operador de proyección $\widehat{P}$. Al actuar este operador sobre un ket, digamos $|\varphi_n\rangle$, produce un ket paralelo a $|\varphi\rangle$ multiplicado por el producto interno de $\langle\varphi|\varphi_n\rangle$. En efecto:

$$\widehat{P}|\varphi_n\rangle = |\varphi\rangle\langle\varphi|\varphi_n\rangle = \langle\varphi|\varphi_n\rangle|\varphi\rangle. \tag{3.75}$$

4. Si $|\phi\rangle$ y $|\varphi\rangle$ son dos kets arbitrarios y $a$ es un número complejo, se tiene:

$$\langle\phi|a\varphi\rangle = a\langle\phi|\varphi\rangle; \qquad \langle a\phi|\varphi\rangle = a^*\langle\phi|\varphi\rangle. \tag{3.76}$$

5. La combinación lineal de kets y bras es otro ket o bra y se satisaface la regla

$$\langle\phi|\Big(|\varphi_1\rangle + a|\varphi_2\rangle\Big) = \langle\phi|\varphi_1\rangle + a\langle\phi|\varphi_2\rangle; \tag{3.77}$$

$$\Big(\langle a\phi_1| + b\langle\phi_2|\Big)|\varphi\rangle = a^*\langle\phi_1|\varphi\rangle + b\langle\phi_2|\varphi\rangle. \tag{3.78}$$

6. Si $\widehat{P}$ es un operador, entonces:

$$\langle\alpha|\widehat{P}^\dagger|\beta\rangle = \langle\beta|\widehat{P}|\alpha\rangle.^* \tag{3.7}$$

### 3.6.2. Algunas relaciones útiles*

Para ilustrar el uso de la notación de Dirac presentaremos, en esta notación, algunas deducciones y relaciones que conocemos en la notación estándar:

1. *La condición de ortogonalidad*

   *a*) Primera alternativa

$$\begin{aligned} \int \varphi_{n'}^*(x)\varphi_n(x)dx &\iff \int \langle \varphi_{n'}|x\rangle\langle x|\varphi_n\rangle dx \\ &= \langle \varphi_{n'}| \int |x\rangle\langle x|dx \ \ |\varphi_n\rangle \\ &\iff \langle \varphi_{n'}|\varphi_n\rangle = \delta_{n'n}. \end{aligned} \tag{3.80}$$

   En esta expresión se utilizó el operador unidad

$$\int |x\rangle\langle x|dx = 1. \tag{3.81}$$

   *b*) Segunda alternativa

$$\begin{aligned} \int \varphi_{n'}^*(x)\varphi_n(x)dx &\iff \int \langle n'|x\rangle\langle x|n\rangle dx \\ &= \langle n'| \int |x\rangle\langle x|dx \ \ |n\rangle \\ &\iff \langle n'|n\rangle = \delta_{n'n}. \end{aligned} \tag{3.82}$$

2. *La propiedad de cerradura*

   Si al operador unidad de la ecuación (3.81) lo multiplicamos desde la derecha por $|x'\rangle$, tenemos

$$\int |x\rangle\langle x|x'\rangle dx = |x'\rangle, \tag{3.83}$$

   ésto significa que

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x') \tag{3.84}$$

3. *Desarrollo de una función en una base y la completez de la base*

Si tenemos una función $\psi(x)$ y una base de funciones $\{\varphi_n(x)\}$, el desarrollo de $\psi(x)$ en la base se expresa, en una y otra notación, en la forma

$$\psi(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x) \quad \Longleftrightarrow \quad |\psi\rangle = \sum_n c_n \langle x|n\rangle. \tag{3.85}$$

Utilizaremos la notación de Dirac para obtener los coeficientes $c_n$ y para deducir la completez de la base.

*a*) Cuando multiplicamos $\psi(x)$ por $\varphi^*_{n'}(x)$ e integramos, tenemos

$$\begin{aligned} \int \varphi^*_{n'}(x)\psi(x)dx \quad \Longleftrightarrow \quad \langle n'|\psi\rangle &= \sum_n c_n \langle n'| \int |x\rangle\langle x|dx\ |n\rangle; \\ &= \sum_n c_n \langle n'|n\rangle; \\ &= \sum_n c_n \delta_{n'n}; \end{aligned} \tag{3.86}$$

que después de sumar nos da

$$c_n = \langle n|\psi\rangle. \tag{3.87}$$

*b*) Si sustituimos estos coeficientes en (3.85), se tiene

$$|\psi\rangle = \sum_n \langle n|\psi\rangle\ |n\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\psi\rangle. \tag{3.88}$$

El factor que multiplica a $|\psi\rangle$ en el último término debe ser la unida[d] en consecuencia:

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = 1. \tag{3.8[9]}$$

Esta ecuación expresa la completez de la base $|n\rangle$.

### 3.6.3. La representación de momentos*

En la notación de Dirac es fácil visualizar un cambio de representación, [por] ejemplo de la representación de coordenadas a la de momentos. Este camb[io de] representación lo hace la transformada de Fourier

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)dx; \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k)dk.$$