

Capítulo 9

Momento angular y potencial central

9.1. Introducción

La rotación es una componente fundamental del movimiento y tiene características propias muy importantes, tanto en la descripción clásica como en la cuántica. Está casi siempre presente en el movimiento de partículas y sólidos y para describirlo, en la física clásica, se han introducido un conjunto adecuado e importante de variables físicas. La variable física relevante es el momento angular, que en la teoría cuántica se define exactamente como en la física clásica, es decir, como el producto

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla, \quad (9.1)$$

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades del operador $\hat{\mathbf{L}}$. Deduiremos la conservación del momento angular en ausencia de torcas externas. Veremos también que en la descripción del movimiento de partículas, en presencia de potenciales centrales, el producto $\hat{L}^2 = \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{L}}$ juega un rol fundamental. Finalmente, teniendo en mente el problema del átomo de hidrógeno, que estudiaremos en el siguiente capítulo, resolveremos el problema de eigenvalores y eigenfunciones del momento angular.

9.2. Momento angular y relaciones de conmutación

Los vectores \mathbf{r} y ∇ se pueden expresar en el sistema de coordenadas que más convenga o facilite el tratamiento matemático, generalmente, se escoge en correspondencia con las simetrías del sistema físico. En coordenadas cartesianas tene-

mos

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{L}_x \mathbf{i} + \hat{L}_y \mathbf{j} + \hat{L}_z \mathbf{k}, \quad (9.2)$$

en la que

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad \hat{L}_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \text{y} \quad \hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (9.3)$$

En notación compacta, las expresiones anteriores se escriben en la forma siguiente (se sobreentiende que los índices repetidos se suman)

$$\hat{L}_i = -i\hbar \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{con} \quad x_1 = x, \quad x_2 = y \quad \text{y} \quad x_3 = z. \quad (9.4)$$

El símbolo ϵ_{ijk} se conoce como el tensor de Levi-Civita que es igual a 1 cuando los índices ijk que aparecen en \hat{L}_i , x_j y $\partial/\partial x_k$, respectivamente, son una permutación par de 123; es -1 si la permutación es impar y 0 si se repite algún índice.

El movimiento de rotación más común del mundo microscópico es el que experimentan los electrones en los átomos. La simetría de estos sistemas sugiere que las coordenadas apropiadas para estudiar esta clase de sistemas son las esféricas. Antes de ver las propiedades de conmutación del operador $\hat{\mathbf{L}}$ y sus componentes, veremos cómo quedan estos operadores en coordenadas esféricas. En este sistema

$$\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r \quad \text{y} \quad \nabla = \mathbf{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{u}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (9.5)$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}} &= -i\hbar r \mathbf{u}_r \times \left(\mathbf{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{u}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &= i\hbar \left(\mathbf{u}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} - \mathbf{u}_\phi \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (9.6)$$

El operador $\hat{\mathbf{L}}$ depende únicamente de las variables angulares. Por esto, conmuta con toda función de r y $\partial/\partial r$. Regresaremos sobre este punto más adelante.

9.2. Momento angular y relaciones de conmutación

Teniendo en cuenta que las componentes cartesianas de los vectores polares unitarios son

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r &= \mathbf{i} \operatorname{sen} \theta \cos \phi + \mathbf{j} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi + \mathbf{k} \cos \theta, \\ \mathbf{u}_\theta &= \mathbf{i} \cos \theta \cos \phi + \mathbf{j} \cos \theta \operatorname{sen} \phi - \mathbf{k} \sin \theta, \\ \mathbf{u}_\phi &= -\mathbf{i} \operatorname{sen} \phi + \mathbf{j} \cos \phi, \end{aligned} \quad (9.7)$$

se puede verificar fácilmente que la componente \hat{L}_z definida como el producto escalar de $\hat{\mathbf{L}}$ con $\hat{\mathbf{k}}$ toma la forma simple:

$$L_z = i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (9.8)$$

Vimos antes que la naturaleza de los eigenvalores y la posibilidad de que los operadores posean eigenfunciones comunes depende de cómo son sus relaciones de conmutación. Esto es particularmente importante en los problemas con potenciales centrales. Veremos ahora algunas de las relaciones de conmutación entre las componentes \hat{L}_i y también con los operadores de posición \hat{x}_i y los momentos lineales \hat{p}_i .

9.2.1. Conmutación de los operadores \hat{L}_i con los operadores \hat{x}_j

A continuación calcularemos explícitamente un par de conmutadores. Recordemos que para determinar correctamente el conmutador, se procede como si del lado derecho del conmutador tuviéramos una función, la función sobre la que efectivamente actuará el conmutador. En nuestro primer ejemplo, esta precaución no tendrá ninguna consecuencia porque los operadores considerados conmutan, pero en el segundo ejemplo será importante tener presente esto. Comenzaremos con el conmutador $[\hat{L}_x, \hat{x}]$ cuyo desarrollo es el siguiente:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{x}] &= \hat{L}_x \hat{x} - \hat{x} \hat{L}_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) x + i\hbar x \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= 0 - i\hbar x \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) + i\hbar x \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (9.9)$$

De esta relación concluimos que, en general, los operadores \hat{L}_i conmutan con los operadores \hat{x}_i del mismo índice. Veamos ahora una variante. Sea el conmutador

$[\hat{L}_x, \hat{y}]$, cuyo desarrollo es

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{y}] &= \hat{L}_x \hat{y} - \hat{y} \hat{L}_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) y + i\hbar y \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= -i\hbar z - i\hbar y \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) + i\hbar y \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= i\hbar z. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Los operadores \hat{L}_i no conmutan con los operadores \hat{x}_j , cuyo índice es diferente. De la misma manera se obtiene:

$$[\hat{L}_x, \hat{z}] = -i\hbar y. \quad (9.11)$$

En la notación compacta utilizada antes, estas relaciones de conmutación se resumen en la expresión

$$[\hat{L}_i, \hat{x}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{x}_k. \quad (9.12)$$

9.2.2. Conmutación de los operadores \hat{L}_i con los operadores \hat{p}_j

Calcularemos ahora algunos conmutadores de las componentes de $\hat{\mathbf{L}}$ con las de $\hat{\mathbf{p}}$. Estos resultados serán de mucha utilidad en el cálculo de conmutadores de mayor complejidad. Comenzamos con los operadores de igual índice; tenemos por ejemplo:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{p}_x] &= \hat{L}_x \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{L}_x = -\hbar^2 \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \hbar^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= -\hbar^2 \left(y \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} - z \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \right) + \hbar^2 \left(y \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - z \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Los operadores \hat{L}_i conmutan, en general, con los \hat{p}_i , pero si los índices no son iguales los operadores no conmutan. Consideremos, por ejemplo, el conmutador

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{p}_y] &= \hat{L}_x \hat{p}_y - \hat{p}_y \hat{L}_x = -\hbar^2 \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \hbar^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= -\hbar^2 \left(y \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} - z \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \hbar^2 \frac{\partial}{\partial z} + \hbar^2 \left(y \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - z \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \\ &= i\hbar \hat{p}_z. \end{aligned} \quad (9.14)$$

De igual manera, tenemos:

$$[\hat{L}_x, \hat{p}_z] = -i\hbar \hat{p}_y. \quad (9.15)$$

9.2. Momento angular y relaciones de conmutación

En notación compacta, las relaciones de conmutación del momento angular y las componentes del momento lineal se resumen en la expresión general

$$[\hat{L}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{p}_k. \quad (9.16)$$

Es notable la semejanza entre estas relaciones de conmutación y las que se obtuvieron en (9.12). Relaciones semejantes se obtendrán a continuación.

9.2.3. Conmutación entre las componentes \hat{L}_j

Calcularemos explícitamente una de las tres posibles relaciones de conmutación entre las componentes \hat{L}_j . Sea

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= \hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_y \hat{L}_x \\ &= -\hbar^2 \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) - \hat{L}_y \hat{L}_x \\ &= -\hbar^2 \left(y \frac{\partial}{\partial x} + yz \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} - yx \frac{\partial^2}{\partial z^2} - z^2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + zx \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right) - \hat{L}_y \hat{L}_x. \end{aligned} \quad (9.17)$$

En las dos últimas ecuaciones, se desarrolló explícitamente el primer término $\hat{L}_x \hat{L}_y$ del conmutador, de manera que las derivadas queden a la derecha dispuestas a actuar sobre la función. Si se hace lo mismo con el segundo término $\hat{L}_y \hat{L}_x$, y sumamos, tenemos:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= -\hbar^2 \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= i\hbar \hat{L}_z. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Puesto que además

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_x] = \hat{L}_x \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_x = 0, \quad (9.19)$$

tenemos también, para las relaciones de conmutación de las componentes \hat{L}_i , la expresión compacta

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{L}_k. \quad (9.20)$$

Vimos en el capítulo anterior que el hecho de que los operadores conmuten o no tiene consecuencias físicas importantes. En particular, vimos que si dos operadores hermitianos \hat{f} y \hat{g} no conmutan, el producto de sus dispersiones medias es

mayor o igual que el valor esperado de su conmutador \hat{h} , es decir, que

$$(\Delta f)^2(\Delta g)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle \hat{h} \rangle|^2. \quad (9.21)$$

Si aplicamos esta propiedad a las componentes \hat{L}_i del momento angular, tenemos

$$(\Delta L_i)^2(\Delta L_j)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} |\langle \hat{L}_k \rangle|^2. \quad (9.22)$$

Esto significa que *no es posible determinar simultáneamente, sin dispersión, las tres componentes de $\hat{\mathbf{L}}$, a menos que $\langle \hat{\mathbf{L}} \rangle = 0$ y $\Delta \mathbf{L} = 0$.*

9.3. Eigenvalores y eigenfunciones de \hat{L}_z y \hat{L}^2

Además de las componentes del momento angular \hat{L}_i , un operador muy importante es

$$\hat{L}^2 = \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{L}}. \quad (9.23)$$

Veremos un poco más adelante, que la parte angular de la cinemática en potenciales centrales está descrita precisamente por este operador. Otra característica interesante del operador \hat{L}^2 resulta de sus relaciones de conmutación con las componentes \hat{L}_i . Al final del capítulo se muestra que

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0. \quad (9.24)$$

Si solamente atendiéramos a estas relaciones de conmutación, tendríamos que concluir que, si el momento angular está bien definido, cada una de sus componentes debería estar también bien definida, es decir, deberían ser variables sin dispersión. Pero esto contrasta con la no conmutación de las componentes \hat{L}_i y la implicación mencionada líneas arriba de que al menos dos componentes tienen dispersión y cumplen la desigualdad de Heisenberg. Se acostumbra escoger \hat{L}_x , \hat{L}_y , como las componentes con dispersión. Por lo tanto,

$$\Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{\hbar}{2} |\langle \hat{L}_z \rangle|. \quad (9.25)$$

\hat{L}_z será entonces la variable con valor bien definido y, dado que conmuta con \hat{L}^2 , comparte eigenfunciones con \hat{L}^2 .

Si utilizamos el operador $\hat{\mathbf{L}}$ en la representación esférica y tomamos en cuenta que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_\theta}{\partial \theta} &= -\hat{\mathbf{u}}_r & \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_\phi}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_\theta}{\partial \phi} &= \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_\phi & \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_\phi}{\partial \phi} &= -\hat{\mathbf{i}} \cos \phi - \hat{\mathbf{j}} \sin \phi. \end{aligned} \quad (9.26)$$

se puede verificar después de un poco de algebra que \hat{L}^2 se reduce a la forma

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right), \quad (9.27)$$

que coincide con la parte angular del Laplaciano ∇^2 en coordenadas esféricas (véase la ecuación (9.78)). Veremos que cuando el potencial es central, la ecuación de Schrödinger es separable y la parte asociada a las variables angulares es prácticamente igual a L^2 .

Nos interesa ahora referirnos al problema de eigenvalores y eigenfunciones del momento angular, más específicamente de los operadores \hat{L}_z y \hat{L}^2 , cuyas ecuaciones de eigenvalores las escribimos así:

$$\hat{L}_z \varphi(\phi) = \hbar m_z \varphi(\phi), \quad (9.28)$$

$$\hat{L}^2 \psi(\theta, \phi) = \hbar^2 \lambda \psi(\theta, \phi). \quad (9.29)$$

Nuestro objetivo es obtener los eigenvalores $\hbar m_z$ y $\hbar^2 \lambda$ y las eigenfunciones $\varphi(\phi)$ y $\psi(\theta, \phi)$. Si en la ecuación (9.29) proponemos la factorización

$$\psi(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi), \quad (9.30)$$

tenemos las siguientes dos ecuaciones (la elección de la constante de separación m^2 se comprenderá dos líneas adelante)

$$-\frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} = m^2 \Phi(\phi), \quad (9.31)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Theta(\theta) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \Theta(\theta) + \lambda \Theta(\theta) = 0. \quad (9.32)$$

La última es la ecuación diferencial de Legendre. Nuestro objetivo es resolver ambas ecuaciones. Comenzaremos con la primera. Se puede verificar que la función $e^{im\phi}$ es solución de esa ecuación y que, con m sustituida por m_z , también es solución de (9.28). Esto significa que

$$\Phi(\phi) = \varphi(\phi) = e^{im_z\phi}, \quad (9.33)$$

Para que esta solución sea una función univaluada es necesario que

$$\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi) \quad (9.34)$$

Esta condición se satisface si

$$e^{im_z 2\pi} = 1; \quad \text{en consecuencia:} \quad m_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.35)$$

Esto muestra que los eigenvalores y las eigenfunciones de \hat{L}_z son $m_z \hbar$ y $e^{im_z\phi}$, con $m_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Puesto que la elección del eje z es arbitraria, es previsible que, si se hubiera escogido otra dirección para la componente sin dispersión, esa componente del momento angular estaría cuantizada. Como se dijo líneas arriba, la no conmutación de las componentes \hat{L}_i implica que sólo una de ellas puede medirse sin dispersión, y la tradición ha sido escoger a L_z con esta propiedad. Al número cuántico m_z se le conoce como *número cuántico magnético* debido a que este número surge de manera natural cuando las partículas cargadas se mueven en un campo central en presencia de un campo magnético, cuya dirección define al eje z .

Regresemos ahora a la ecuación diferencial de Legendre. Si se hace el cambio de variable

$$\xi = \cos \theta \quad P(\xi) = \Theta(\theta), \quad (9.36)$$

la ecuación (9.32) se transforma en

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{dP(\xi)}{d\xi} \right] - \frac{m_z^2}{1 - \xi^2} P(\xi) + \lambda P(\xi) = 0. \quad (9.37)$$

Para resolver esta ecuación, comenzaremos con el caso particular de $m_z = 0$, para el que la ecuación diferencial es simplemente

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{dP^0(\xi)}{d\xi} \right] + \lambda P^0(\xi) = 0. \quad (9.38)$$

Una propiedad importante de esta ecuación es su invariancia bajo la transformación $\xi \mapsto -\xi$. Esto significa que sólo buscaremos soluciones con paridad definida, es decir, soluciones que son pares o impares en ξ . Para obtener estas soluciones, utilizaremos el método de Frobenius por lo que

$$P^0(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k. \quad (9.39)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, resulta la relación de recurrencia para los coeficientes

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+1)(k+2)} a_k, \quad (9.40)$$

con $a_{-2} = 0$, para las funciones pares, y con $a_{-1} = 0$, para las funciones impares. Se sabe que la ecuación de Legendre tiene soluciones no divergentes en $\xi = \pm 1$ y se ve claramente de la relación de recurrencia que la serie termina en $k = l$ si

$$\lambda = l(l+1), \quad (9.41)$$

con l entero no negativo. Las soluciones son entonces los polinomios de Legendre

$$P_l^0(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l, \quad \text{con } l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (9.42)$$

El entero l se conoce como el *número cuántico orbital del momento angular* o simplemente *número cuántico orbital*. No es difícil mostrar que los primeros cuatro polinomios de Legendre son:

$$P_0^0(\xi) = 1, \quad P_1^0(\xi) = \xi, \quad P_2^0(\xi) = \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1) \quad \text{y} \quad P_3^0(\xi) = \frac{1}{2}(5\xi^3 - 3\xi). \quad (9.43)$$

Dadas las soluciones de la ecuación de Legendre para $m_z = 0$, es fácil verificar que las funciones

$$P_l^m(\xi) = (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{d^m P_l^0(\xi)}{d\xi^m}, \quad \text{con } m \leq l, \quad (9.44)$$

satisfacen la ecuación

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{dP_l^m(\xi)}{d\xi} \right] - \frac{m^2}{1 - \xi^2} P_l^m(\xi) + l(l+1) P_l^m(\xi) = 0, \quad (9.45)$$

que es exactamente la ecuación (9.37) que deseábamos resolver. Las soluciones $P_l^m(\xi)$ son los polinomios asociados de Legendre de orden l y m . Es importante observar que al resolver las ecuaciones de eigenvalores, de \hat{L}_z y \hat{L}^2 , surgieron de manera natural dos números cuánticos, m_z y l . El movimiento rotacional está también cuantizado. El número cuántico l puede, por lo pronto, tomar cualquier valor⁴⁶ de los naturales $0, 1, 2, 3, \dots$, mientras que m_z toma cualquier valor de los enteros $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$. Por lo tanto, los valores posibles para L_z , como se ve en la figura 9.1, son $0, \pm\hbar, \pm 2\hbar, \dots, \pm l\hbar$, mientras que los valores

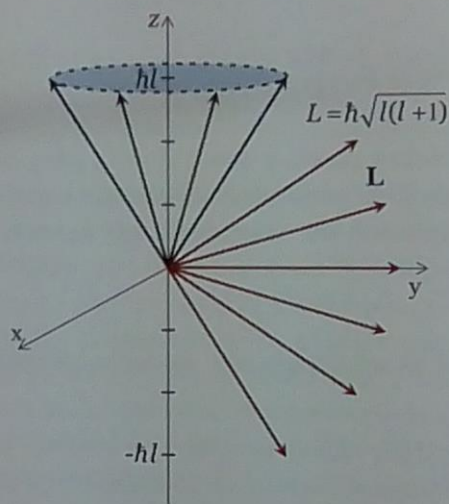


Figura 9.1: Las orientaciones del momento angular \mathbf{L} y, en consecuencia, su proyección en el eje z están cuantizadas. El vector \mathbf{L} precesita alrededor de z con proyección L_z bien definida.

esperados del operador \hat{L}^2 son $\hbar^2 l(l+1)$ y las correspondientes eigenfunciones son:

$$\Psi(\theta, \phi) = e^{im_z\phi} P_l^{m_z}(\cos\theta), \quad \text{con} \quad |m_z| \leq l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (9.46)$$

⁴⁶ Veremos en el siguiente capítulo que, en realidad, l estará limitado por el número cuántico que define la energía.

9.3. Eigenvalores y eigenfunciones de \hat{L}_z y \hat{L}^2

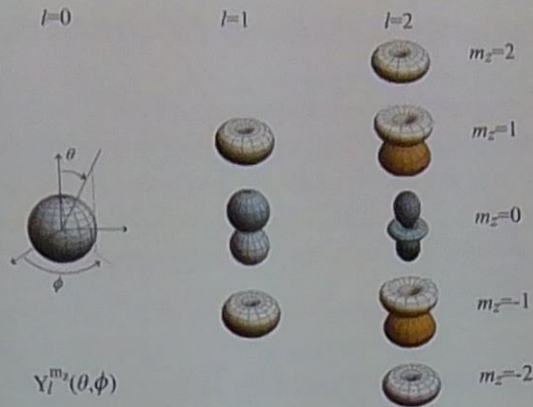


Figura 9.2: Gráficas polares de los armónicos esféricos $Y_l^m(\theta, \phi)$ como funciones de θ y de ϕ para diferentes valores de l y m .

Si estas funciones se normalizan tenemos los armónicos esféricos

$$Y_l^{m_z}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{l-|m_z|}{l+|m_z|}} (-1)^{m_z} e^{im_z\phi} P_l^{m_z}(\cos\theta), \quad (9.47)$$

con $|m_z| \leq l = 0, 1, 2, 3, \dots$. Los armónicos esféricos forman un conjunto ortonormal completo. Se acostumbra llamar a los estados con $l = 0$, estados *s* (de *sharp*), con $l = 1$, estados *p* (de *principal*), con $l = 2$, estados *d* (de *diffusive*), con $l = 3$, estados *f* (de *fundamental*) y los siguientes son estados *g, h, i, ...* en orden alfabético. En la figura 9.2 se dibujan las superficies polares⁴⁷ de los armónicos *s, p* y *d*, para los diferentes valores posibles del número cuántico magnético m_z .

En resumen, los eigenvalores y eigenfunciones que obtuvimos en esta sección satisfacen las ecuaciones:

$$\hat{L}_z e^{im_z\phi} = \hbar m_z e^{im_z\phi}, \quad \text{con} \quad m_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l, \quad (9.48)$$

$$\hat{L}^2 Y_l^{m_z}(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^{m_z}(\theta, \phi), \quad \text{con} \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (9.49)$$

⁴⁷ En las gráficas polares el radio en la dirección (θ, ϕ) es proporcional a $|Y_l^{m_z}(\theta, \phi)|^2$.

9.4. Representaciones matriciales del momento angular*

Obtendremos en esta sección representaciones matriciales de los operadores \widehat{L}^2 , \widehat{L}_z , \widehat{L}_x y \widehat{L}_y . En capítulos anteriores vimos que la representación del hamiltoniano en la base de sus eigenfunciones es diagonal, lo mismo ocurrirá con las representaciones de \widehat{L}^2 y \widehat{L}_z si utilizamos los armónicos esféricos. El problema es ligeramente más complicado con las representaciones de \widehat{L}_x y \widehat{L}_y que no son variables de valor definido.

9.4.1. Representaciones matriciales de \widehat{L}^2 y \widehat{L}_z *

La representación matricial de los operadores \widehat{L}^2 y \widehat{L}_z , en la base de sus eigenfunciones, puede obtenerse directamente porque conocemos sus elementos de matriz. En efecto, si denotamos las eigenfunciones de \widehat{L}^2 y \widehat{L}_z como $|lm_z\rangle$, tenemos

$$\langle lm'_z | \widehat{L}^2 | lm_z \rangle = \hbar^2 l(l+1) \delta_{m',m_z}; \quad \text{y} \quad \langle lm'_z | \widehat{L}_z | lm_z \rangle = \hbar m_z \delta_{m',m_z}. \quad (9.50)$$

Estas ecuaciones muestran claramente que las representaciones matriciales de \widehat{L}^2 y \widehat{L}_z son diagonales y de dimensión $(2l+1) \times (2l+1)$. De hecho, para una l fija, las matrices que los representan⁴⁸ son

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.51)$$

y

$$L_z = \hbar \begin{pmatrix} l & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l-1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & -l \end{pmatrix}. \quad (9.52)$$

⁴⁸ Para ordenar los elementos de matriz $(L_i)_{m',m}$, en la representación matricial de un operador \widehat{L}_i , se usa la convención de etiquetar las columnas con los valores de m , decreciendo de izquierda a derecha, y los renglones con los valores de m' , decreciendo de arriba para abajo.

9.4.2. Representaciones matriciales de \hat{L}_x y \hat{L}_y^*

Para el momento angular, se puede definir operadores de ascenso y descenso similares a los operadores \hat{b} y \hat{b}^\dagger , operadores que nos permiten transitar por todo el espacio de las eigenfunciones de \hat{L}^2 y \hat{L}_z . Mostraremos en esta sección que las combinaciones complejas

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y; \quad \text{y} \quad \hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y, \quad (9.53)$$

son operadores de ascenso y descenso. Comprobaremos esta característica y obtendremos algunas propiedades que utilizaremos para determinar las representaciones de \hat{L}_x , \hat{L}_y , que en términos de \hat{L}_+ , \hat{L}_- se pueden expresar así:

$$\hat{L}_x = \frac{1}{2} (\hat{L}_+ + \hat{L}_-); \quad \text{y} \quad \hat{L}_y = \frac{1}{2i} (\hat{L}_+ - \hat{L}_-). \quad (9.54)$$

Antes de obtener las representaciones matriciales deduciremos algunas relaciones importantes:

Algunas propiedades de \hat{L}_+ y \hat{L}_-^*

Si usamos los conmutadores $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{L}_k$, podemos mostrar que \hat{L}_+ y \hat{L}_- satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\hat{L}_\mp, \hat{L}_z] = \pm \hbar \hat{L}_\mp, \quad (9.55)$$

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar \hat{L}_z, \quad (9.56)$$

y también, por simple sustitución, las ecuaciones

$$\hat{L}_\mp \hat{L}_\pm = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 \pm \hbar \hat{L}_z. \quad (9.57)$$

Veremos ahora que, cuando los operadores \hat{L}_+ y \hat{L}_- actúan sobre las eigenfunciones $|lm_z\rangle$ de \hat{L}^2 y \hat{L}_z , funcionan como operadores de ascenso y descenso. En efecto, de la relación de conmutación (9.55), tenemos la ecuación

$$\hat{L}_z \hat{L}_+ |lm_z\rangle - \hat{L}_+ \hat{L}_z |lm_z\rangle = \hbar \hat{L}_+ |lm_z\rangle, \quad (9.58)$$

que se transforma en

$$\hat{L}_z \hat{L}_+ |lm_z\rangle = \hbar(m_z + 1) \hat{L}_+ |lm_z\rangle. \quad (9.59)$$

Esta ecuación muestra que $\widehat{L}_+|lm_z\rangle$ es una eigenfunción de \widehat{L}_z con eigenvalor $\hbar(m_z+1)$. Esto significa que, ciertamente, la acción de \widehat{L}_+ sobre $|lm_z\rangle$ deja una función proporcional a $|l, m_z+1\rangle$, es decir, que

$$\widehat{L}_+|lm_z\rangle = l_{m_z+1, m_z}^+ |l, m_z+1\rangle. \quad (9.60)$$

De la misma forma se puede mostrar que

$$\widehat{L}_-|lm_z\rangle = l_{m_z-1, m_z}^- |l, m_z-1\rangle. \quad (9.61)$$

Los operadores \widehat{L}_+ y \widehat{L}_- actúan, evidentemente, como operadores de ascenso en el espacio de Hilbert de las eigenfunciones de \widehat{L}_z . Los factores l_{m_z+1, m_z}^+ y l_{m_z-1, m_z}^- tienen unidades de momento angular, los desconocemos aún, pero los determinaremos a continuación. Vale la pena mencionar que todas estas propiedades son válidas para cualquier otro operador de momento angular. Un poco más adelante encontraremos al espín \widehat{S} y al momento angular total \widehat{J} . Las propiedades y relaciones de conmutación que satisfagan serán similares a las que estamos señalando para L con el correspondiente cambio de L por S o por J .

Para obtener los factores l_{m_z+1, m_z}^+ , l_{m_z-1, m_z}^- , tomamos una de las relaciones (9.57) y la multiplicamos a la derecha por $|lm_z\rangle$ y a la izquierda por $\langle lm_z|$; tenemos así la ecuación:

$$\langle lm_z|\widehat{L}_+\widehat{L}_-|lm_z\rangle = \langle lm_z|\widehat{L}^2|lm_z\rangle - \langle lm_z|\widehat{L}_z^2|lm_z\rangle + \langle lm_z|\hbar\widehat{L}_z|lm_z\rangle, \quad (9.62)$$

que se transforma en

$$l_{m_z, m_z-1}^+ l_{m_z-1, m_z}^- = \hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m_z^2 + \hbar^2 m_z = \hbar^2 (l(l+1) - m_z(m_z-1)). \quad (9.63)$$

Puesto que en el lado derecho tenemos un número real, debe cumplirse la relación

$$l_{m_z, m_z-1}^+ = (l_{m_z-1, m_z}^-)^*, \quad (9.64)$$

con lo cual tenemos, por una parte (observe con atención los subíndices en la igualdad de la izquierda y en la implicación de la derecha)

$$|l_{m_z, m_z-1}^+|^2 = \hbar^2 (l(l+1) - m_z(m_z-1)) \rightarrow |l_{m_z+1, m_z}^+| = \hbar \sqrt{l(l+1) - (m_z+1)m_z}, \quad (9.65)$$

9.4. Representaciones matriciales del momento angular*

y por otra

$$|l_{m_z-1, m_z}^-|^2 = \hbar^2(l(l+1) - m_z(m_z-1)) \rightarrow |l_{m_z-1, m_z}^-| = \hbar\sqrt{l(l+1) - (m_z-1)m_z}. \quad (9.66)$$

Con estos resultados, y eligiendo las fases $e^{i\theta^\pm}$ de l_{m_z, m_z-1}^+ y l_{m_z-1, m_z}^- en la convención de Condon-Shortley, en la que $e^{i\theta^\pm} = 1$, se verifica fácilmente que

$$\widehat{L}_+ |lm_z\rangle = \hbar\sqrt{(l+m_z+1)(l-m_z)} |l, m_z+1\rangle, \quad (9.67)$$

y que

$$\widehat{L}_- |lm_z\rangle = \hbar\sqrt{(l+m_z)(l-m_z+1)} |l, m_z-1\rangle. \quad (9.68)$$

Obtendremos ahora las representaciones de \widehat{L}_x y \widehat{L}_y . Antes obtendremos las de \widehat{L}_+ y \widehat{L}_- . Si multiplicamos (9.67) por la izquierda con el bra $\langle lm'_z|$, tenemos los elementos de matriz

$$(L_+)_{m'_z, m_z} = \langle lm'_z | \widehat{L}_+ | lm_z \rangle = l_{m_z+1, m_z}^+ \langle lm'_z | l, m_z+1 \rangle = l_{m_z+1, m_z}^+ \delta_{m'_z, m_z+1}. \quad (9.69)$$

Con la convención para ordenar elementos de matriz, que se mencionó antes, la representación matricial de este operador, para un valor dado de l , es

$$L_+ = \begin{pmatrix} 0 & l_{l, l-1}^+ & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{l-1, l-2}^+ & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & l_{-l+1, -l}^+ \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.70)$$

De igual forma, tenemos los elementos de matriz

$$(L_-)_{m'_z, m_z} = \langle lm'_z | \widehat{L}_- | lm_z \rangle = l_{m_z-1, m_z}^- \langle lm'_z | l, m_z-1 \rangle = l_{m_z-1, m_z}^- \delta_{m'_z, m_z-1}, \quad (9.71)$$

cuya representación matricial es

$$L_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{l-1, l}^- & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_{l-2, l-1}^- & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{-l, -l+1}^- & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.72)$$

En la ecuación (9.73), expresamos los operadores \hat{L}_x y \hat{L}_y en términos de los operadores de ascenso y descenso. Las representaciones matriciales L_x y L_y se obtienen de combinaciones similares de las representaciones L_+ y L_- , es decir, si

$$\hat{L}_x = \frac{1}{2} (\hat{L}_+ + \hat{L}_-) \quad \text{y} \quad \hat{L}_y = \frac{1}{2i} (\hat{L}_+ - \hat{L}_-). \quad (9.73)$$

Las matrices L_x y L_y satisfacen las relaciones

$$L_x = \frac{1}{2} (L_+ + L_-) \rightarrow \frac{1}{2} (l_{m_z+1, m_z}^+ \delta_{m'_z, m_z+1} + l_{m_z-1, m_z}^- \delta_{m'_z, m_z-1}); \quad (9.74)$$

$$L_y = \frac{1}{2i} (L_+ - L_-) \rightarrow \frac{1}{2i} (l_{m_z+1, m_z}^+ \delta_{m'_z, m_z+1} - l_{m_z-1, m_z}^- \delta_{m'_z, m_z-1}). \quad (9.75)$$

Ambas matrices tienen elementos no nulos solamente en las diagonales vecinas a la principal. Usando estas expresiones, el estudiante puede verificar que, si $l = 1$, las representaciones matriciales L_x y L_y son

$$L_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}; \quad L_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{2} & 0 \\ i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.76)$$

9.5. Potenciales centrales

Entre las interacciones que experimentan las partículas, una clase muy importante la constituyen los potenciales centrales, que se caracterizan porque la interacción de dos partículas depende únicamente de la distancia que las separa. La interacciones gravitacional y eléctrica son ejemplos de potenciales centrales. En algunos sistemas la interacción más importante es central, como la que existe entre el electrón y el núcleo del átomo de hidrógeno (constituido generalmente por un sólo protón); en otros sistemas la interacción principal no es central, aunque la interacción sea eléctrica, como la interacción que experimenta una carga en presencia de campos externos uniformes.

En los metales hidrogenoides la interacción del electrón periférico⁴⁹ con el núcleo y los restantes electrones del átomo puede describirse, aproximadamente,

⁴⁹ Nos referimos al electrón en el último de los niveles de energía ocupados.

por un *potencial efectivo* con simetría esférica. En estos casos, como en el del átomo de hidrógeno, la ecuación de Schrödinger será de la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) + V(r)\varphi(\mathbf{r}) = E\varphi(\mathbf{r}). \quad (9.77)$$

Para tratar esta familia de problemas, es conveniente utilizar el sistema de coordenadas esféricas. En el sistema de coordenadas esféricas, el operador ∇^2 , que aparece en el término de energía cinética, es

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (9.78)$$

El primer término, del segundo miembro de esta ecuación, describe la cinemática en la dirección radial y los dos últimos términos describen el movimiento angular.

En la sección anterior, vimos que el operador \hat{L}^2 , expresado en coordenadas esféricas, era:

$$\hat{L}^2 = \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{L}} = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right). \quad (9.79)$$

En consecuencia, la ecuación de Schrödinger de un sistema con potencial central, puede expresarse en coordenadas esféricas como

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(r) \right) \varphi(r, \theta, \phi) = E \varphi(r, \theta, \phi). \quad (9.80)$$

Nuestro propósito es obtener la solución completa de este problema para potenciales $V(r)$ específicos. Adelantaremos en este capítulo lo relativo a la parte angular. En el capítulo del átomo de hidrógeno comentaremos la solución de la parte radial.

La relevancia que tiene el momento angular $\hat{\mathbf{L}}$ en un problema de potencial central es muy clara. Toda la dependencia angular del hamiltoniano está en \hat{L}^2 . En la sección 9.3 obtuvimos los eigenvalores y eigenfunciones de \hat{L}^2 y los utilizaremos aquí para definir la parte angular de la solución en un problema con potencial central. En este problema el momento angular conmuta con el hamiltoniano.

Aunque la parte angular se origina en el término de energía cinética, al término que depende de \hat{L}^2 se le conoce como el *potencial centrífugo*.

Desde el punto de vista matemático, la ecuación en diferencias parciales (9.80) es separable. Proponemos entonces una solución del tipo

$$\varphi(r, \theta, \phi) = R(r)\psi(\theta, \phi), \quad (9.81)$$

que después de sustituir en la ecuación de (9.80) da lugar a las siguientes ecuaciones

$$\widehat{L}^2\psi(\theta, \phi) = \hbar^2\lambda\psi(\theta, \phi), \quad (9.82)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{\hbar^2\lambda}{2mr^2} + V(r) \right) R(r) = E R(r), \quad (9.83)$$

con $\hbar^2\lambda$ una constante de separación. La primera ecuación ya la conocemos, es exactamente la ecuación (9.29) cuyos eigenvalores son

$$\hbar^2\lambda = \hbar^2l(l+1), \quad (9.84)$$

y cuyas eigenfunciones son los armónicos esféricos

$$\psi(\theta, \phi) = Y_l^{m_z}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{l-|m_z|}{l+|m_z|}} (-1)^{m_z} e^{im_z\phi} P_l^{m_z}(\cos\theta), \quad |m_z| \leq l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (9.85)$$

Este resultado confirma que \widehat{L}^2 y el hamiltoniano de potencial central comparten eigenfunciones. Tomando en cuenta estos resultados, queda por resolver la ecuación

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{\hbar^2l(l+1)}{2mr^2} + V(r) \right] R(r) = E R(r), \quad (9.86)$$

a la que nos referiremos como la parte radial de la ecuación de Schrödinger con potencial central. En el siguiente capítulo continuaremos con la solución de este problema. El análisis que se ha hecho hasta este punto es importante y usaremos los resultados obtenidos en la discusión que sigue sobre el átomo de hidrógeno. Puesto que ya conocemos la solución de la parte angular, sólo tendremos que resolver la parte radial, es decir la ecuación (9.86) cuando $V(r)$ es un potencial coulombiano.

9.6. Problemas ilustrativos

Problema 9.1

Demostrar que el momento angular $\widehat{\mathbf{L}}$ conmuta con el hamiltoniano de potencial central.

Solución. La conmutación o no del operador $\widehat{\mathbf{L}}$ con el hamiltoniano es una característica importante en la solución de los problemas físicos. Si el potencial es central, tenemos

$$[\widehat{\mathbf{L}}, H] = \frac{1}{2m} [\widehat{\mathbf{L}}, \widehat{p}^2] + [\widehat{\mathbf{L}}, V(r)]. \quad (9.87)$$

Puesto que

$$\widehat{p}^2 = \widehat{\mathbf{p}} \cdot \widehat{\mathbf{p}} = \widehat{p}_x^2 + \widehat{p}_y^2 + \widehat{p}_z^2, \quad (9.88)$$

y dado que

$$\begin{aligned} [\widehat{\mathbf{L}}, \widehat{p}_i^2] &= \widehat{\mathbf{L}} \widehat{p}_i \widehat{p}_i - \widehat{p}_i \widehat{p}_i \widehat{\mathbf{L}} = \widehat{\mathbf{L}} \widehat{p}_i \widehat{p}_i - \widehat{p}_i \widehat{\mathbf{L}} \widehat{p}_i + \widehat{p}_i \widehat{\mathbf{L}} \widehat{p}_i - \widehat{p}_i \widehat{p}_i \widehat{\mathbf{L}} \\ &= [\widehat{\mathbf{L}}, \widehat{p}_i] \widehat{p}_i + \widehat{p}_i [\widehat{\mathbf{L}}, \widehat{p}_i], \end{aligned} \quad (9.89)$$

es fácil concluir de aquí, y utilizando las relaciones de conmutación que se obtuvieron antes, que

$$[\widehat{\mathbf{L}}, \widehat{p}^2] = 0. \quad (9.90)$$

Queda por determinarse el conmutador $[\widehat{\mathbf{L}}, V(r)]$, que se desarrolla así:

$$[\widehat{\mathbf{L}}, V(r)] = -i\hbar \mathbf{r} \times [\nabla V(r)] - i\hbar \mathbf{r} \times V(r) \nabla + i\hbar V(r) \mathbf{r} \times \nabla. \quad (9.91)$$

Los dos últimos términos se cancelan. Si además usamos la relación $\mathbf{F} = -\nabla V(r)$, en la que \mathbf{F} es la fuerza externa, queda

$$[\widehat{\mathbf{L}}, V(r)] = i\hbar \mathbf{r} \times \mathbf{F} = i\hbar \mathbf{M}. \quad (9.92)$$

Aquí utilizamos la conocida relación de \mathbf{F} con la torca \mathbf{M} . Resulta así que

$$[\widehat{\mathbf{L}}, H] = i\hbar \mathbf{M}. \quad (9.93)$$

Esto significa que, en ausencia de una torca, el momento angular conmuta con \hat{H} . En los potenciales centrales \mathbf{F} es paralela a \mathbf{r} , la torca es cero y $\hat{\mathbf{L}}$ conmuta con el hamiltoniano de potencial central.

Problema 9.2

Demuestre que

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = 0. \quad (9.94)$$

Solución. Esta ecuación la escribimos explícitamente en la forma

$$[\hat{L}_x^2, \hat{L}_x] + [\hat{L}_y^2, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z^2, \hat{L}_x] = 0. \quad (9.95)$$

Como \hat{L}_x^2 conmuta obviamente con \hat{L}_x , el primer conmutador es cero. Queda entonces mostrar que

$$[\hat{L}_y^2, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z^2, \hat{L}_x] = 0. \quad (9.96)$$

Evaluaremos por separado estos conmutadores. Comenzamos con $[\hat{L}_y^2, \hat{L}_x]$. Si desarrollamos el conmutador tenemos

$$\begin{aligned} [\hat{L}_y^2, \hat{L}_x] &= \hat{L}_y^2 \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_y^2 \\ &= \hat{L}_y^2 \hat{L}_x - \hat{L}_y \hat{L}_x \hat{L}_y + \hat{L}_y \hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_x \hat{L}_y^2 \\ &= \hat{L}_y [\hat{L}_y, \hat{L}_x] + [\hat{L}_y, \hat{L}_x] \hat{L}_y. \end{aligned} \quad (9.97)$$

Aquí se puede sustituir el conmutador $[\hat{L}_y, \hat{L}_x]$ por $-i\hbar\hat{L}_z$ para obtener

$$[\hat{L}_y^2, \hat{L}_x] = -i\hbar(\hat{L}_y \hat{L}_z + \hat{L}_z \hat{L}_y). \quad (9.98)$$

De la misma forma se tiene

$$\begin{aligned} [\hat{L}_z^2, \hat{L}_x] &= \hat{L}_z^2 \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_z^2 \\ &= \hat{L}_z^2 \hat{L}_x - \hat{L}_z \hat{L}_x \hat{L}_z + \hat{L}_z \hat{L}_x \hat{L}_z - \hat{L}_x \hat{L}_z^2 \\ &= \hat{L}_z [\hat{L}_z, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z, \hat{L}_x] \hat{L}_z. \end{aligned} \quad (9.99)$$

Si sustituimos el conmutador $[\hat{L}_z, \hat{L}_x]$ por $i\hbar\hat{L}_y$ tenemos

$$[\hat{L}_z^2, \hat{L}_x] = i\hbar(\hat{L}_z \hat{L}_y + \hat{L}_y \hat{L}_z), \quad (9.100)$$

que es exactamente el negativo del conmutador $[\widehat{L}_y^2, \widehat{L}_x]$, de manera que si sustituimos en (9.96) tenemos lo que queríamos probar: que

$$[\widehat{L}^2, \widehat{L}_x] = 0. \quad (9.101)$$

Problema 9.3

En un problema de potencial central el momento angular $\widehat{\mathbf{L}}$ se conserva si no depende explícitamente del tiempo.

Solución. Teniendo en cuenta la relación general (7.97), aplicada al momento angular, tenemos

$$\frac{d\widehat{\mathbf{L}}}{dt} = \frac{\partial \widehat{\mathbf{L}}}{\partial t} + [\widehat{\mathbf{L}}, H]. \quad (9.102)$$

Es claro que, si el momento angular no depende explícitamente del tiempo, el primer término del segundo miembro es cero. Además por hipótesis, $[\widehat{\mathbf{L}}, H] = 0$. En consecuencia

$$\frac{d\widehat{\mathbf{L}}}{dt} = 0, \quad (9.103)$$

y el momento angular se conserva. En los potenciales centrales la torca externa es cero y el momento angular $\widehat{\mathbf{L}}$ se conserva.

9.7. Problemas

1. Suponga una partícula libre en el estado $\psi = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ con $\mathbf{r} = x_1\hat{\mathbf{x}}_1 + x_2\hat{\mathbf{x}}_2 + x_3\hat{\mathbf{x}}_3$, y con $\mathbf{k} = k_1\hat{\mathbf{x}}_1 + k_2\hat{\mathbf{x}}_2 + k_3\hat{\mathbf{x}}_3$ constante.

- Demuestre que $L_i = \hbar(\mathbf{r} \times \mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{x}}_i$.
- ¿Cuál es su momento angular $\hat{\mathbf{L}}$?

2. Si la partícula del problema anterior se mueve en el plano $x_2 - x_3$ con $\mathbf{k} = k_2\hat{\mathbf{x}}_2$, ¿Cuál es el valor esperado de \hat{L}_z ?

3. Diga si el momento angular $\hat{\mathbf{L}}$ de la partícula libre conmuta o no con su hamiltoniano.

4. Una partícula se encuentra en un potencial central y en un estado cuyo número cuántico l es 3. ¿Cuáles son los posibles valores de m_z ? ¿Cuál es la probabilidad de que el valor esperado de L_z sea \hbar ?

5. Utilizando las relaciones de conmutación, para las componentes \hat{L}_i , muestre que el operador

$$\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{L}} = (\hat{L}_y\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_y)\mathbf{i} + (\hat{L}_z\hat{L}_x - \hat{L}_x\hat{L}_z)\mathbf{j} + (\hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x)\mathbf{k} \quad (9.104)$$

se puede escribir en la forma

$$\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{L}} = i\hbar\hat{\mathbf{L}}. \quad (9.105)$$

6. Demuestre explícitamente las siguientes relaciones de conmutación

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0. \quad (9.106)$$

7. Demuestre las relaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_\theta}{\partial \theta} &= -\hat{\mathbf{u}}_r & \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_\phi}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_\theta}{\partial \phi} &= \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_\phi & \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_\phi}{\partial \phi} &= -\hat{\mathbf{i}} \cos \phi - \hat{\mathbf{j}} \sin \phi. \end{aligned} \quad (9.107)$$

8. Utilice la serie de Frobenius en (9.39) para demostrar las relaciones (9.40) y (9.42).

9. Dibuje los primeros armónicos esféricos como función de θ , para $\phi = \pi/4$.

