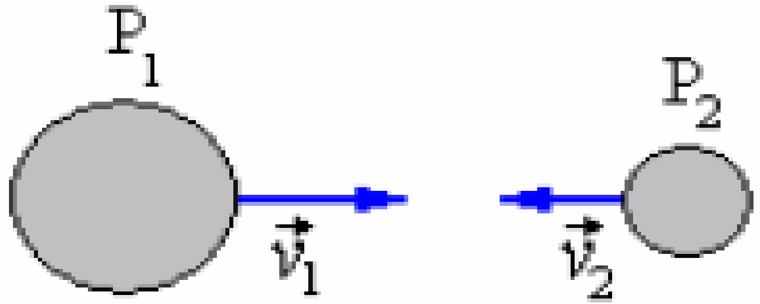
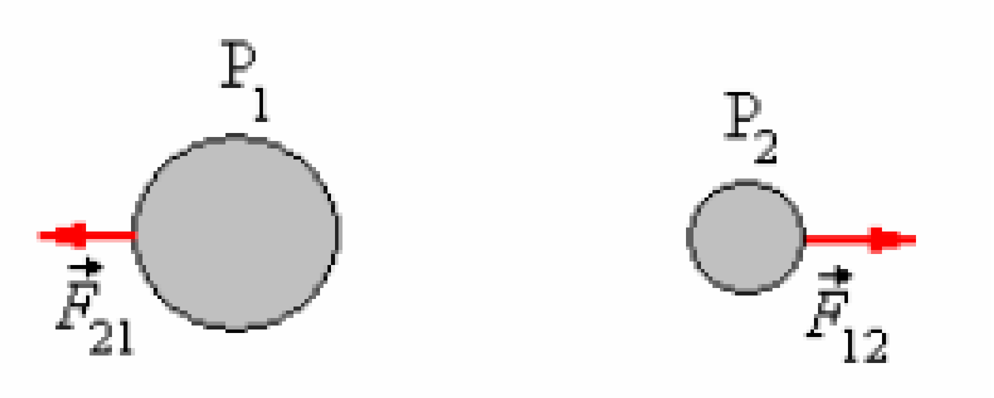
IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

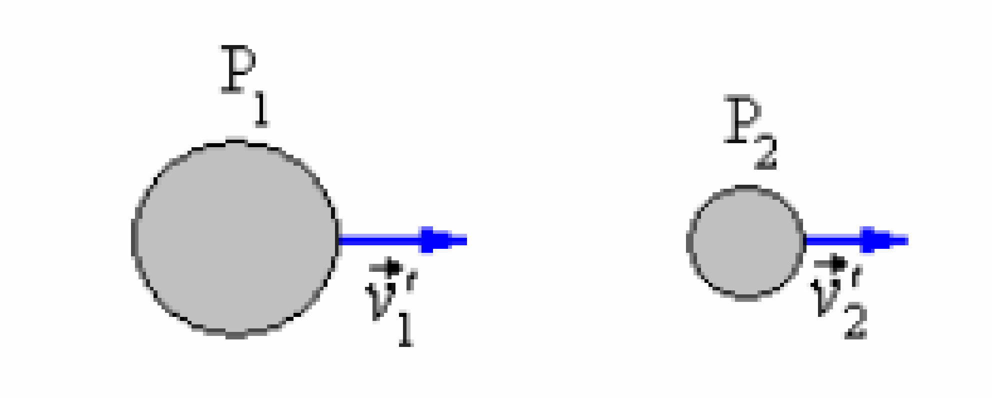
Supongamos el caso de dos partículas esféricas P_1 y P_2 de masas m_1 y m_2 con trayectorias contenidas en la misma recta, se aproximan una a otra con velocidades $\vec{v}_1$, y $\vec{v}_2$ respectivamente.



Cuando P_1 y P_2 entran en contacto, P_1 ejerce sobre P_2 la fuerza F_{12} y P_2 ejerce sobre P_1 la fuerza F_{21}. De acuerdo con la tercera ley de Newton $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

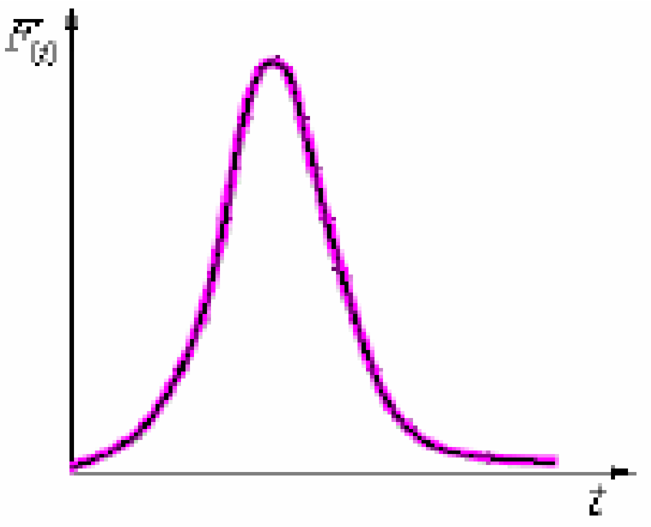


Después que P_1 y P_2 se separan, las velocidades respectivas son $\vec{v'}_1$ y $\vec{v'}_2$ diferentes de $\vec{v}_1$, y $\vec{v}_2$.



Ahora nos preguntamos. ¿Qué pasa durante el choque?

El tiempo de contacto total Δt es muy pequeño, quizás solo de aproximadamente 0,001 segundos. La fuerza de contacto inicialmente es cero, aumenta hasta un valor muy grande y. finalmente disminuye hasta cero, cuando dejan de estar en contacto. La figura siguiente muestra una variación típica de la fuerza en el tiempo de contacto.



Sea $t_f - t_i = \Delta t$ el tiempo que dura el choque, aplicando la segunda ley de Newton a las partículas P_1 y P_2.

$$\vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_1 = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \text{ y}$$

$$\vec{F}_{21} = m_2 \vec{a}_2 = m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

o $\vec{F}_{12}\, dt = m_1 d\vec{v}_1$ y $\vec{F}_{21}\, dt = m_2 d\vec{v}_2$

Integrando las dos relaciones durante el choque,

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12}\, dt = m_1 \int_{v_1}^{v'_1} d\,\vec{v}_1 \text{ y}$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21}\, dt = m_2 \int_{v_2}^{v'_2} d\,\vec{v}_2$$

Finalmente

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12}\, dt = m_1\left(\vec{v'}_1 - \vec{v}_1\right) \text{ y}$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21}\, dt = m_2\left(\vec{v'}_2 - \vec{v}_2\right)$$

Trabajando con el primer miembro

Trabajando con el primer miembro

$\int_{t_i}^{t_f} F dt$ corresponde al área bajo la curva mostrada en la figura anterior, a ésta cantidad la llamaremos

IMPULSO $\left(\vec{J}\right)$

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{(t)}\, dt$$

Sus dimensiones son: [F] [T] = [M][L][T]$^{-1}$

En el sistema internacional sus unidades son:

Trabajando con el segundo miembro

$$m_1\left(\vec{v'}_1-\vec{v}_1\right) \text{ y } m_2\left(\vec{v'}_2-\vec{v}_2\right)$$

Llamaremos a la cantidad $m\vec{v}=\vec{p}$,

CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL o Momentum lineal de la partícula (lo designaremos en la práctica simplemente como **cantidad de movimiento**), cuyas dimensiones son:

[M] [[L]] = [M] [L] $[T]^{-1}$

En el sistema internacional sus unidades son:

y esta cantidad es también igual al impulso $\vec{J}$ recibido en ese instante por la partícula

$$\vec{J}=\vec{p}_f-\vec{p}_i$$

Luego: "**El cambio de la cantidad de movimiento es igual al impulso**".

Ejemplo 5. Una pelota de 100 gramos está en reposo sobre el piso, cuando recibe un puntapié que la lanza con una velocidad de 30 m/s.

a) ¿Qué impulso se dio a la pelota?

b) Si el tiempo que el pie está en contacto con la pelota es 10^{-3} segundos. ¿Cuál es la magnitud aproximada de la fuerza impulsiva?

$$\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i$$

En este caso

$$m = 0{,}1 \text{ kg}, \ \vec{v}_i = 0 \ , \ \vec{v}_f = 30\hat{i} \text{ m/s}$$

$$\vec{J} = (0{,}1)(30\hat{i}) - 0 = 3\hat{i}\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$$

b) Se puede obtener un estimado de la fuerza que actúa sobre la pelota, dividiendo el impulso $\vec{J}$ por el tiempo $\Delta t = t_f - t_i$ en que actúa la fuerza :

$$\vec{J} = (0{,}1)(30\hat{i}) - 0 = 3\hat{i}\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$$

b) Se puede obtener un estimado de la fuerza que actía sobre la pelota, dividiendo e1 impulso $\vec{J}$ por el tiempo $\Delta t = t_f - t_i$ en que actúa la fuerza :

$$\vec{F} = \frac{\vec{J}}{\Delta t}$$

Como $\vec{J} = 3\hat{i}\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$ y $\Delta t = 0{,}001\,s$

$$\vec{F} = \frac{3\hat{i}}{0{,}001} = 3000\hat{i}\ \text{N}$$

Ejemplo 6. Se deja caer una pelota de masa m de una altura h sobre el nivel del suelo y rebota hasta una altura h_1

a) ¿Cuál es la velocidad v_i inmediatamente antes de chocar con el suelo?

b) ¿Cuál es la velocidad v_f inmediatamente después de chocar con el suelo?

c) ¿Cuál es el impulso $\vec{J}$ que se le da a la pelota en el impacto con el suelo?

Solución.

a) Como $\vec{v}_0 = 0$, $x = 0$, $y = h_0$

$$\vec{v}_i = \sqrt{2gh_0}\,\hat{j}$$

b) Como después de chocar $y = h_1$, la velocidad $\vec{v}_f$ después de chocar es:

$$\vec{v}_f = \sqrt{2gh_1}\,\hat{j}$$

c) El impulso de la pelota es:

$$\vec{J} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = m\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_0}\right)\hat{j}$$

CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La cantidad de movimiento de una partícula de masa m y velocidad $\vec{v}$ es:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

La cantidad de movimiento de n partículas es la suma de las cantidades de movimiento individuales,

$$\vec{p}_{total} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v_i} = M \vec{v}_{CMi}$$

De aquí $\vec{p}_{total} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v_i} = M \vec{v}_{CMi}$

La cantidad de movimiento total de un sistema es igual a la cantidad de movimiento de la masa total concentrada en el centro de masa del sistema.

Derivando nuevamente la expresión anterior:

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_{total} = M \frac{d}{dt}\vec{v}_{iCM} = M \vec{a}_{iCM} = \vec{F}_{iext}$$

Esta cantidad es muy importante, ya que si no hay fuerza externa, Esta cantidad es muy importante, ya que si no hay fuerza externa,

$$\vec{F}_{iext} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\vec{p}_{total} = 0$$

$$\Rightarrow\; \vec{p}_{total} = \mathrm{CONSTANTE}$$

Esto es la conservación de la cantidad de movimiento. Si no hay fuerzas externas sobre un sistema. La cantidad de movimiento total del sistema es constante.

Ejemplo 7. Tres partículas de masas 2 kg, 1 kg y 3 kg respectivamente con vectores posición

$$\vec{r}_1 = \left[5t\hat{i} - 5t^2\hat{j} + (3t-2)\hat{k}\right]\text{cm},$$
$$\vec{r}_2 = \left[(2t-3)\hat{i} - \left(12-5t^2\right)\hat{j} + \left(4+6t-3t^3\right)\hat{k}\right]\text{cm}$$
$$\text{y } \vec{r}_3 = \left[(12t-1)\hat{i} - \left(t^2+2\right)\hat{j} - t^3\hat{k}\right]\text{cm}$$

Donde t es el tiempo en segundos.

Encontrar: a) La velocidad del centro de masa en $t =$ 1 s y $t = 2$ s.

b) La cantidad de movimiento lineal total del sistema en $t = 1$ s y $t = 2$ s.

c) Analizar si el sistema de tres partículas es sistema aislado

a) La posición del centro de masa esta dada por la expresión:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Reemplazando valores, obtenemos:

$$\vec{r}_{CM} = \left[(3t-1)\hat{i} + \left(-t^2+3\right)\hat{j} + \left(-t^3+2t\right)\hat{k}\right]\text{cm}$$

La velocidad del centro de masa es

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{CM} = \left[3\hat{i} - 2t\hat{j} + \left(-3t^2+2\right)\hat{k}\right]\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Para $t = 1$ s

$$\vec{v}_{1M} = \left[3\hat{i} - 2\hat{j} + -\hat{k}\right]\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Para $t = 2$ s

$$\vec{v}_{2M} = \left[3\hat{i} - 4\hat{j} + -8\hat{k}\right]\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

b) La cantidad de movimiento del sistema es:

$$\vec{p} = +m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2 + m_3\,\vec{v}_3 = M\,\vec{v}_{CM}$$

$$\vec{p} = 6\left[3\hat{i} - 2t\hat{j} + \left(-3t^2 + 2\right)\hat{k}\right]\frac{\text{kg cm}}{\text{s}}$$

Para $t = 1$ s

$$\vec{p}_1 = 6\left[3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}\right]\frac{\text{kg cm}}{\text{s}}$$

Para $t = 2$ s

$$\vec{p}_2 = 6\left[3\hat{i} - 4\hat{j} - 8\hat{k}\right]\frac{\text{kg cm}}{\text{s}}$$

c) Como , $\vec{p}_1 \neq \vec{p}_2$, $\vec{p}$ no es constante, luego el sistema no es aislado.

$$x_{cm} = \frac{m_b(x_b + x) + m_p x}{m_b + m_p}$$

Como la posición del centro de masa del sistema es invariante, se tiene:

$$\frac{m_b x_b + m_p(2{,}5)}{m_b + m_p} = \frac{m_b(x_b + x) + m_p x}{m_b + m_p}$$

$$\Rightarrow \ (m_b + m_p)x = m_p(2{,}5)$$

Reemplazando valores:

$$x = \frac{70(2{,}5)}{(200 + 70)} = 0{,}65\text{m}$$